# 应用泛函分析引论

陈殿杰 编

重庆大学出版社




# 应用泛函分析引论

陈殿杰　编

重 庆 大 学 出 版 社

## 内容简介

本书根据"全国工科院校泛函分析讨论会"制订并修改的《应用泛函分析》教学大纲编写。第一章为预备知识，第二章至第四章为基础部分，包括度量空间、赋范空间和内积空间。第五章至第七章为应用部分，包括逼近理论初步、有界线性算子谱理论初步和Banach空间微分学初步。每节后面附有一定数量习题。

本书可供工科院校研究生和高年级本科生作教材，亦可供广大工程技术人员参考。


**应用泛函分析引论**

陈殿杰 编

责任编辑 涂光裕 谢晋洋

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

科学技术文献出版社重庆分社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：9.375 字数：211千

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

印数：1—4500

标准书号：ISBN 7-5624-0049-0 / O·15 统一书号：13408·20

定 价：1.55元

# 前　言

随着科学技术的高速发展，"泛函分析"的理论和方法已不仅仅为专业数学工作者感兴趣，而且也吸引着众多技术科学的研究者和工程技术人员。因此，从工科高年级学生、工科研究生以及中级工程技术人员所具备的数学基础的实际出发，写一本既适合他们阅读，又能介绍"泛函分析"的基本内容，还要包含一些应用基础的教科书或参考书，就是一项有意义的工作，这也是本书期望达到的目的。

我们假定读者通晓初等微积分和线性代数基本知识，而一些必不可少的其它基础，则提要地写在第一章中，在使用本书时，可以或详或略酌情处理。第二至四章是介绍"泛函分析"中三大空间及其线性算子理论的基础知识，这是学习"泛函分析"的各类专业人员都必须掌握的。第五至七章分别介绍了逼近理论、有界线性算子谱理论和非线性泛函分析的初步知识，适合力学类、机械类、计算类、测量类以及控制类等专业人员选用。行文力求明白易懂，但又不失去推理的严密性，极少数需要用到更深入知识的重要定理省略了证明。每一节（第七章除外）后面都附有一定数量的习题，估计工科高年级学生和研究生完成它们的大多数不会有什么困难。

本教材虽经多次教学实践，也作了一些大的改动，但终因成书时间仓促，又限于编者本人水平，错漏难免，恳请专家、读者指正。

黄智明教授、陶琨教授在百忙中仔细审阅了全书，贺绍信副教授、章芸讲师对本书写法曾提出若干有益的建议，在此，谨向他们致以诚挚的感谢。

陈殿杰　1987年1月。

# 目　　录

# 第一章　预备知识

## 一、集合

集合是数学中最基础的概念之一。粗略地说，凡是具有某种特殊性质的、确定的事物的全体就是一个集合（或简称集）。

集合用单个大写字母$A$，$B$，$X$，$Y$，…表示，有时，也用大括号表示。例如，$\{1, 2, 3, 4\}$表示以数1，2，3，4为元素的集合；$\{f(t)|_{t\in[a,b]}\}$表示定义在闭区间$[a,b]$上的全体函数的集合。

在集论中，常使用下述记号：

$\phi$，**空集**。

$a\in A$，$a$是集$A$的元（读作$a$属于$A$）。

$b\notin A$，$b$不是集$A$的元（读作$b$不属于$A$）。

$A=B$，集$A$与集$B$**相等**（二集由完全相同的元组成）。

$A\neq B$，集$A$与集$B$**不等**（二集中至少包含互不相同的一个元）。

$A\subset B$，$A$是$B$的**子集**（读作$A$被$B$包含，或$B$包含$A$），$A$的每一个元都是$B$的元。也可记为$B\supset A$。

$A\subsetneq B$，$A$是$B$的**真子集**：$A$的所有元都属于$B$，但$B$至少有一个元不属于$A$。

$A\cup B=\{x|_{x\in A或x\in B}\}$，$A$与$B$的**并集**（见图1-1）。

$A\cap B=\{x|_{x\in A且x\in B}\}$，$A$与$B$的**交集**（见图1-2）。

$A\cap B=\phi$，集$A$与集$B$是互相**分离**的（即二集无公共元）。

$A-B=\{x|_{x\in A\text{但}x\notin B}\}$，$A$与$B$的**差集**， 这里$B$可以是也可以不是$A$的子集(见图1-3)。

$A^c=X-A=\{x|_{x\in X\text{但}x\notin A,\ A\subset X}\}$称$A$在$X$中的**补集**（或**余集**），如果避免混淆，可以记为$C_XA$(见图1-4)。

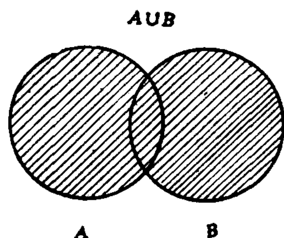



图1-1　两个集合$A$与$B$的并

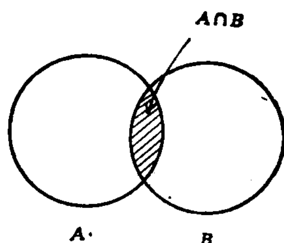



图1-2　两个集合$A$与$B$的交

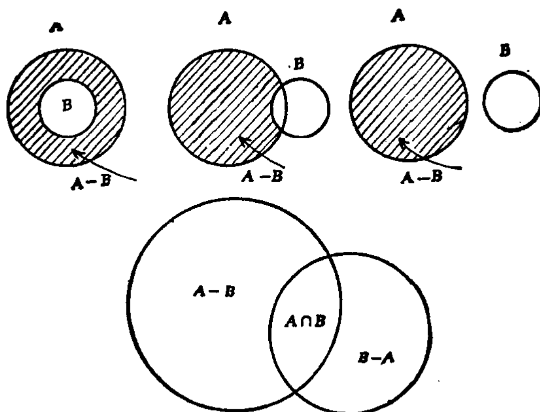



图1-3　集$A$与集$B$的差集

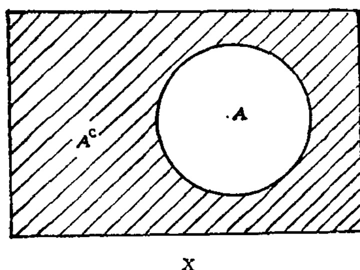



图1-4　集X的子集A在X中的余集

从上面的定义，可以直接推得下述关系：

1°　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$。

2°　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

3°　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$。

4°　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$。

5°　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$（见图1-5）。

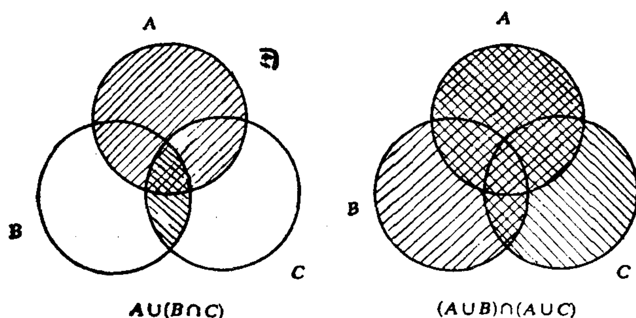



图1-5　5°式示意图

6°　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$（见图1-6）。

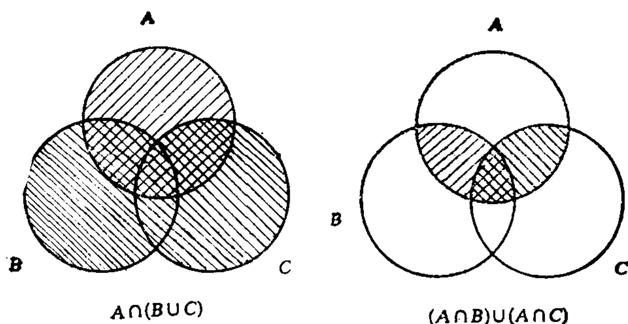



图1-6　$6^0$式示意图

$7^0$　$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$。

$8^0$　$A\cup B\supset A$，$A\cup B\supset B$。

此外还可以推得一些显然的事实：

$A\subset B\Longleftrightarrow A\cup B=B\Longleftrightarrow A\cap B=A$。

$A\subset C$且$B\subset C\Longleftrightarrow A\cup B\subset C$。

$C\subset A$且$C\subset B\Longleftrightarrow C\subset A\cap B$。

$(A^c)^c=A$，$X^c=\phi$，$\phi^c=X$

**命题1**　(**De Morgan法则**)：对于集$X$中的子集$A_n(n=1,2,\cdots)$有

$$(\text{I})\ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c\ ;\quad (\text{II})\ \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c。$$

**证**：(I)设$x\in\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c$，则$x\notin A_n(n=1,2,\cdots)$，于是$x\in A_n^c(n=1,2,\cdots)$，因此

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c，推得\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c$$

反之，设$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c$，则$x\in A_n^c(n=1,2\cdots)$，所以，

$x \notin A_n$ $(n=1, 2\cdots)$，$x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，于是$x \in \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$，推得

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c \subset \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$，总之

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

（Ⅱ） 对（Ⅰ）取补集，得到

$\left[\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right]^c = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$，于是$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$，换$A_n$为$A_n^c$，有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n^c)^c\right]^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$$

**命题2** 对于集$E$与任意一列集$A_n(n=1, 2, \cdots)$分配律成立，亦即

$$E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)$$

读者自证。

**Cartan积** 二非空集$X$和$Y$的Cartan积$X \times Y$是所有序对$(x, y)$作成的集，其中$x \in X$，$y \in Y$（图1-7）。

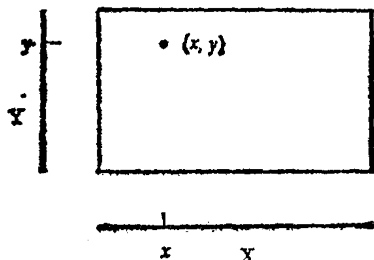



图1-7 积集$X \times Y$构成示意图

**设$A$是一集合，如果构成集$A$的元的个数为有限（重复的**

元只算一个），则称$A$为**有限集**，否则称$A$为**无限集**。

我们规定空集$\phi$也是有限集。

称集$A$为**可数（或可列）集**，如果$A$是有限集，或者可以作出正整数与$A$的元的一个对应：$A$的每一个元对应着唯一的一个正整数，反之，每一个正整数对应着$A$唯一一个元。

不可数的无限集称为**不可数集**。

例如：正整数集$N$，全体正偶数的集，全体有理数的集，具有有理实部且有有理虚部的复数集，具有有理系数、次数低于$n$的多项式的全体作成的集等都是可数集。而实数集$R$，闭区间$[a, b]$中的全体实数集，定义在区间$[a, b]$上全体连续实函数作成的集等都是不可数集。

我们有下述结论：

1° 任意无限集都包含一个可数集。因此，可数集是无限集中"最小"的集。

2° 可数集的任何无限子集仍是可数的。因此，可数集的任意子集都是可数集。

3° 二可数集的并集、交集、差集都是可数集。容易证明，可数多个可数集之并集仍是可数集。

## 二、映射

设$X$和$Y$是两个集合，$A\subset X$是任意子集，$T$是$A$，$Y$元素间的一个对应法则；如果对于任一$x\in A$，依照法则$T$，$Y$中有唯一确定的元$y\in Y$与之对应，则称$T$为**"X到Y中"的映射**，记为

$T: X\longrightarrow Y$，或$x\longmapsto Tx$。

集合$A\subset X$称为映射$T$的**定义域**，记为$\mathscr{D}(T)$。$T$的象作成的

集合$\{y\in Y|_{y=Tx,\ x\in D(T)}\}$称为映射$T$的**值域**，记为$\mathscr{R}(T)$（图1-8）。

任意子集$B\subset\mathscr{D}(T)$的**象集**$T(B)$是所有象$Tx$作成的集合，其中$x\in B$。显然，$T(\mathscr{D}(T))=\mathscr{R}(T)$。

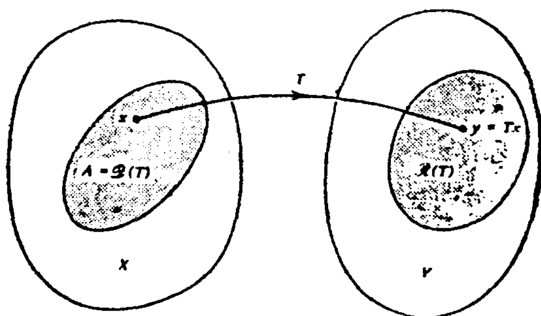



图1-8 映射$T$示意图

一点$y_0\in Y$的逆象是使得$Tx=y_0$的所有$x\in\mathscr{D}(T)$的集合.子集$Q\subset Y$的**逆象集**是使得$Tx\in Q$的一切$x\in\mathscr{D}(T)$的集合。（注意：点$y_0\in Y$的逆象可以是空集、一点、或者$\mathscr{D}(T)$的子集，这取决于$y_0$或$T$。）

特别，如果$\mathscr{R}(T)=Y$，则称$T$为**"从$\mathscr{D}$(T)$\subset$X到Y上"的映射**，又称**满射**（图1-9）。

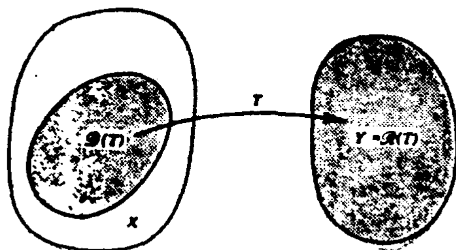



图1-9 满射$T$示意图

显然，$T$：$\mathscr{D}(T) \longrightarrow \mathscr{R}(T)$总是满射。

我们称映射$T$为**单射**或**一一映射**，如果对于任意$x_1, x_2 \in \mathscr{D}(T)$，当$x_1 \neq x_2$时，蕴含$Tx_1 \neq Tx_2$。亦即，$\mathscr{D}(T)$中不同的元有不同的象，于是$\mathscr{R}(T)$中任意点的逆象是单点(图1-10)。

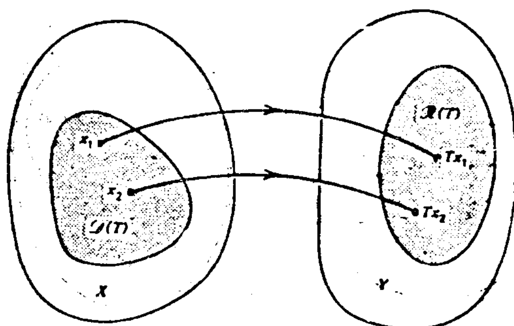



图1-10　$T$：$D(T) \to R(T)$单射的说明

**称$T$是双射**，如果$T$既是单射又是满射。假设$T$：$\mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$是双射，则可以定义一个从$Y$到$\mathscr{D}(T)$的映射，称为映射$T$的**逆映射**，记为$T^{-1}$，于是$T^{-1}$：$Y \longrightarrow \mathscr{D}(T)$(图1-11)。给定元$y_0 \in Y$，通过$T^{-1}$，必有唯一的元$x_0 \in \mathscr{D}(T)$与之对应。

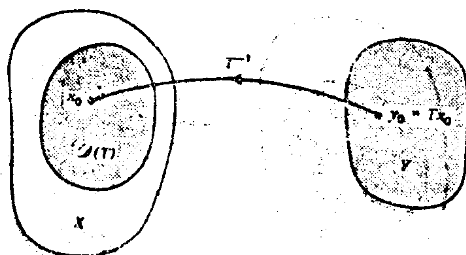



图1-11　双射的逆$T^{-1}$

就一个单射$T$：$\mathscr{D}(T)\longrightarrow Y$来说，它不一定是满射，但它必是从定义域$\mathscr{D}(T)$到其值域$\mathscr{R}(T)$的满射，因而是双射。据前讨论，其逆映射$T^{-1}$：$\mathscr{R}(T)\to\mathscr{D}(T)$存在，亦即给定$y_0\in\mathscr{R}(T)$，必有$x_0\in\mathscr{D}(T)$，且$Tx_0=y_0$，或$x_0=T^{-1}y_0$，显然，这个"逆"的概念更普遍一些，今后，我们经常这样使用它(图1-12)。

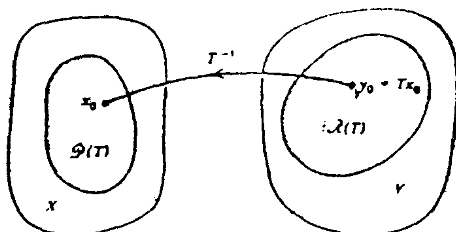



图1-12 逆映射$T^{-1}$：$R(T)\to D(T)$

两个映射$T_1$和$T_2$称为是**相等的**，如果$\mathscr{D}(T_1)=\mathscr{D}(T_2)$，并且对于一切$x\in\mathscr{D}(T_1)=\mathscr{D}(T_2)$，都有$T_1x=T_2x$。

把映射$T$：$\mathscr{D}(T)\to Y$**限制**在子集$B\subset\mathscr{D}(T)$上，限制$T|_B$是$B\to Y$的映射，它是限制$x$在集$B$中而得到的映射。所以，对于所有的$x\in B$，有$T_Bx=Tx$(图1-13)。

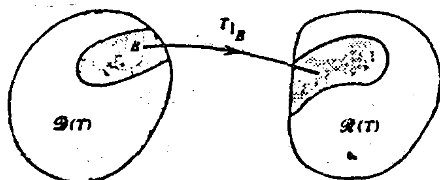



图1-13 映射的限制$T|_B$

映射$T$从$\mathscr{D}(T)$到集$E\supset\mathscr{D}(T)$的**延拓**是映射$\tilde{T}$，使得

$\tilde{T}|_{D(T)}=T$，即对于所有的$x\in\mathscr{D}(T)$，有$Tx=\tilde{T}x$。

$T$的延拓称为是**真延拓**，如果$\mathscr{D}(T)$是$\mathscr{D}(\tilde{T})$的真子集，于是$\mathscr{D}(\tilde{T})-\mathscr{D}(T)\neq\phi$。

下面讨论两个映射的**复合**。如果有两个映射$T$：$X\to Y$，$U$：$Y\to Z$，则

$$x\longmapsto U(Tx)$$

称为"从$X$到$Z$里"的映射，记为$U\cdot T$或简记为$UT$。因此，我们有

$$UT: X\to Z \qquad x\longmapsto U(Tx) \qquad (x\in X)$$

这时，也称元$UTx$为映射$U$和$T$的**复合式积**(图1-14)。

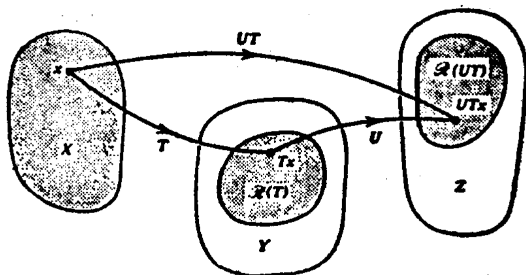



图1-14　映射$T$与映射$U$的复合$UT$

注意：这里两个映射的次序不可颠倒。否则，$TU$有时甚至毫无意义。

一般地，如果$T$：$X\to Y$且$U$：$Y\to X$，则$UT$：$X\to X$，同时$TU$：$Y\to Y$亦有意义。但如果$X\neq Y$，则它们并不相同，甚至，如果$X=Y$，这两个映射$UT$和$TU$也不一定相同。

## 三、集簇

一个实数或复数序列 $\{x_n\}$，总可以将一个正整数$n$和一个实数或一个复数$x_n$联系起来而得出。这个过程，可以看作正整数集$N=\{1, 2\cdots\}$到实数域$R$或复数域$C$里的映射，$x_n$是$n$的象，集$N$叫作该序列的**指标集**。

这个"指标化"的过程可以推广。可以取任意一个非空集$I$(有限、可数或不可数)来取代前面的集$N$，并且作$I$与另一个任意非空集$X$的映射，这就得到了$X$的元的**集簇**，记为$(x_\alpha)_{\alpha\in I}$，或简记为$(x_\alpha)$，这里$x_\alpha\in X$是$\alpha\in I$的象。当然，可能有在$I$中$\alpha\neq\beta$，但$x_\alpha=x_\beta$。我们称集$I$为该集簇$(x_\alpha)$的**指标集**。集簇的一个**子簇**可以这样得到：只要限制指标映射到指标集$I$的非空子集上。

如果$X$的元是一个已知集的子集，则可得到一个**子集簇**$(B_\alpha)_{\alpha\in I}$，其中$B_\alpha$是$\alpha$的象。

集簇$(B_\alpha)$的并集$\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$是其元属于至少一个$B_\alpha$的集合；而交$\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$是其元属于每一个$B_\alpha$，$\alpha\in I$的集合。如果$I=N$，则化为我们熟知的情形：

$$\bigcup_{\alpha=1}^{\infty}B_\alpha \text{和} \bigcap_{\alpha=1}^{\infty}B_\alpha$$

若$I=\{1, 2\}$，则分别为$B_1\cup B_2$，$B_1\cap B_2$。

注意区分由集$X$的子集而产生的集簇，$X$的元是集簇的元，同时也是指标集在指标映射下的象。

## 四、等价关系

设$X$和$Y$是两个非空集合，任意Cartan积$X\times Y$的子集$\tilde{R}$称为一个(二元)**关系**，如果$(x,y)\in\tilde{R}$，也写成$\tilde{R}(x,y)$。

$X$上的关系$\tilde{R}\subset X\times X$叫作**等价关系**，如果满足条件：对于所有的$x,y\in X$，有

$\tilde{R}(x,\ x)$；　　　　　　　　　　　　　　　　(自反性)

$\tilde{R}(x,\ y)$蕴含$\tilde{R}(y,\ x)$；　　　　　　　　　　(对称性)

$\tilde{R}(x,\ y)$和$\tilde{R}(y,\ z)$蕴含$\tilde{R}(x,\ z)$。　　　(传递性)

当$\tilde{R}$是$X$上的一个等价关系时，则$\tilde{R}(x,\ y)$通常记为$x\sim y$(读作$x$等价于$y$)。这时，上述三条件化为

$$x\sim x;$$
$$x\sim y\ \Rightarrow\ y\sim x;$$
$$x\sim y和y\sim z\ \Rightarrow\ x\sim z。$$

例如：$\tilde{R}\subset N\times N,\tilde{R}\{(a,\ b)|_{a-b}$能被$m$(定数)整除$\}$是$N$上的一个等价关系。显然$(a,\ a)\in\tilde{R}$，因为$a-a=0$，$(a-a)/m=0$，因此自反性满足。这个关系是对称的，如果$(a,b)\in\tilde{R}$，且$(a-b)/m=r$，则$(b-a)/m=-r$，即$b-a$亦被$m$整除，$(b,a)\in\tilde{R}$。这个关系是传递的，如果$(a,\ b)\in\tilde{R}$，$(b,\ c)\in\tilde{R}$，且设$(a-b)/m=r$，$(b-c)/m=q$，则$(a-c)/m=(a-b+b-c)/m=r+q$，于是$a-c$可被$m$整除，$(a,\ c)\in\tilde{R}$。

任意元$x_0\in X$的**等价类**是等价于$x_0$的所有元$y\in X$作成的

集合，而任意的$y$叫做该等价类的代表。与$\tilde{R}$有关的等价类构成$X$的一个分划。

由定义，一个非空集$X$的一个分划是$X$的一非空子集簇，其元两两互不相同，但其并集为$X$。

## 五、紧性

集$X$的子集$A$的一个**覆盖**是$X$的一个子集簇，记为$(B_\alpha)_{\alpha\in I}$（$I$是指标集），使得

$$A\subset\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$$

特别，如果$(B_\alpha)$是集$X$的一个覆盖，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha=X$$

一个覆盖称为是有限的，如果它仅由有限多个集$B_\alpha$组成。如果$X=(X,\ J)$是一个拓扑空间（例如：一个度量空间），若所有的$B_\alpha$都是开集，也说该覆盖是**开覆盖**。

一个拓扑空间$X=(X,\ J)$称为是

（Ⅰ） **紧的**。如果它的每一个开覆盖都包含着$X$的一有限覆盖。亦即，一个有限子集簇是$X$的覆盖。

（Ⅱ） **可列（可数）紧的**。如果$X$的任何可数开覆盖包含$X$的一个有限覆盖。

（Ⅲ） **序列紧的**（或称**列紧的**）。如果$X$中每一个序列都包含一收敛子序列。

## 六、上确界和下确界

实数直线$R$的子集$A$是上有界的，如果$A$有上界。亦即，

存在着数$a\in R$，使得对于所有的$X\in A$，都有$x\leqslant a$。如果$A\neq\phi$，则集$A$的最小上界称为$A$的**上确界**，记为：$\sup A$。这就是说，对于$A$的每一个上界$a$，都有$\sup A\leqslant a$。但是，任给$\varepsilon>0$，必存在着$x_0\in A$，使得$x_0>\sup A-\varepsilon$。显然，如果$\phi\neq B\subset A$，则有$\sup B\leqslant\sup A$。

同理，称集$A\subset R$是下有界的，如果$A$有**下界**。亦即，存在着数$b\in R$，使得对于所有的$x\in A$，都有$x\geqslant b$，因此，若$A\neq\phi$，则集$A$的最大下界称为$A$的**下确界**，记为：$\inf A$这就是说，对于$A$的每一个下界$b$，都有$\inf A\geqslant b$。然而，任给$\varepsilon>0$，必存在着$x_0\in A$，使得$x_0<\inf A+\varepsilon$。显然，如果$\phi\neq B\subset A$，则有$\inf B\geqslant\inf A$。

我们称集$A$是**有界**的，如果$A$上有界且下有界。因此，若$A\neq\phi$，则

$$\inf A\leqslant\sup A$$

注意：集$A$的上确界或下确界不一定属于集$A$。

如果映射$T:\mathscr{D}(T)\longrightarrow R$，其值域$\mathscr{R}(T)$（假定非空）上有界，则它的上确界表成：$\sup\limits_{x\in D(T)}Tx$。

如果$\mathscr{R}(T)$下有界，则它的下确界表成：$\inf\limits_{x\in D(T)}Tx$。

同样的记号也使用于与$\mathscr{R}(T)$的子集有关概念里。

## 七、Cauchy收敛准则

数$a$（实的或复的）称为是数列$\{x_n\}$的**极限点**，如果对于任给的$\varepsilon>0$，有无穷多的$n$，使得$|x_n-a|<\varepsilon$。

Bolzano-Weierstass定理指出：任何有界无穷数列$\{x_n\}$至少有一个极限点。由定义，这个数列有无穷多项是本质的，

序列(实的或复的)$\{x_n\}$称为是**收敛**的，如果存在数$x$,使得对于任给的$\varepsilon>0$，存在$N(\varepsilon)$，对于所有大于$N(\varepsilon)$的无穷多个$n$，有$|x_n-x|<\varepsilon$。此时，$x$叫做序列$\{x_n\}$的极限。

收敛序列的极限是唯一的。显然，这个极限就是极限点。从微积分知，收敛数列必是有界的。

下面要叙述并证明Cauchy定理，其重要性在于这样一个事实：从给定数列$\{x_n\}$本身即可判定其收敛性而无需知道它的极限。

**Cauchy收敛定理**：实的或复的序列$\{x_n\}$收敛的充要条件是对于任给$\varepsilon>0$，存在着$N(\varepsilon)>0$，使得对于一切的$m$，$n>N(\varepsilon)$，都有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon \tag{1}$$

**证** 必要性。如果$\{x_n\}$收敛且$a$是它的极限，则对于任给的$\varepsilon>0$，存在$N(\varepsilon)>0$，使当$n>N(\varepsilon)$时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon/2$$

于是，对于$m$，$n>N(\varepsilon)$，推得

$$|x_m-x_n|\leqslant|x_m-a|+|a-x_n|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

充分性。假设(1)式成立，给定$\varepsilon>0$，我们选择一个$n_0$，$n=n_0>N(\varepsilon)$，易知，当$m>N(\varepsilon)$时，一切$x_m$都落在半径为$\varepsilon$且与$x_{n_0}$有关的圆盘$D$中，因此必存在着一个包含$D$的圆盘，使得只有有限多个$x_n\notin D$，于是序列$\{x_n\}$是有界的。由Bolzano-Weierstrass定理，该序列必有极限点$a$，又因为(1)式成立，对每一个给定的$\varepsilon>0$，都存在$N^*$，使得$m$，$n>N^*$时，总有$|x_m-x_n|<\varepsilon/2$，选定$n>N^*$，总有

$$|x_m-a|\leqslant|x_m-x_n|+|x_n-a|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

这说明$\{x_m\}$收敛于$a$。

## 八、群

**群**$G=(G,\cdot)$是元$x$，$y$，…的集$G$和一个映射

$$\begin{aligned}G\times G&\longrightarrow G\\(x,\ y)&\longmapsto xy\end{aligned}\tag{2}$$

满足下述公理：

($G1$)结合律：对于所有的$x$，$y$，$z\in G$，有

$$(xy)z=x(yz)$$

($G2$)有单位元$e$：对于一切$x\in G$，均有

$$xe=ex=x$$

($G3$)有$x$的逆元$x^{-1}$：对于每一个元$x\in G$，$G$中存在着一个元，记为$x^{-1}$，称为$x$的逆元，使得

$$x^{-1}x=xx^{-1}=e$$

这里，对于每一个元$x\in G$，$e$是唯一的，逆元$x^{-1}$也是唯一的。

我们称群$G$为交换群或Abel群，如果还满足公理

($G4$)对于所有的$x$，$y\in G$，有$xy=yx$。

## 九、有界变差函数

定义在区间$[a,\ b]$上的函数$\mathrm{w}(t)$叫作是$[a,\ b]$上的**有界变差函数**，如果在区间$[a,\ b]$上，它的全变差$\mathrm{Var}(\mathrm{w})$有界，其中

$$\mathrm{Var}(\mathrm{w})=\sup\sum_{i=1}^{n}|\mathrm{w}(t_i)-\mathrm{w}(t_{i-1})|$$

上确界是对所有的分划$P_n$：

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$$

取的，这里$n$是任意正整数。

区间$[a,b]$上全体有界变差函数作成的集合记为$V[a,b]$。

有界变差函数具有下述性质：

1° 区间$[a, b]$上任何单调函数必为有界变差函数，且 $\mathrm{Var}(w)=|w(b)-w(a)|$。

2° 区间$[a, b]$上任何有界变差函数必为有界函数。

3° 若$w(t)\in V[a, b]$，且$\mathrm{Var}(w)=0$，则$w(t)$是常数。

4° 若$w_1(t)$，$w_2(t)\in V[a, b]$，$\alpha$，$\beta$是常数，则

$$\alpha w_1(t)+\beta w_2(t)\in V[a, b]$$

并且

$$\mathrm{Var}(w_1+w_2)\leqslant \mathrm{Var}(w_1)+\mathrm{Var}(w_2)$$

$$\mathrm{Var}(\alpha w_1)=|\alpha|\mathrm{Var}(w_1)$$

5° 若$\{w_n(t)\}$是$[a, b]$上的有界变差函数序列，如果它们的全变差序列$\{\mathrm{Var}(w_n)\}$有界，且$w_n(t)\longrightarrow w(t)$，则$w(t)$亦是$[a, b]$上有界变差函数。

下面介绍重要的Jordan分解定理：

**假设$w(t)$是区间$[a, b]$上的有界变差函数，则$w(t)$必能表示成$[a, b]$上两个单调上升函数之差。**

## 十、Riemann-Stieltjes积分

假设$x(t)$是区间$[a, b]$上的连续函数，$w(t)\in V[a,b]$，$P_n$是$[a, b]$上任一分划：

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$$

用$\eta(P_n)$表示小区间$[t_{i-1},t_i]$ $(i=1, 2, \cdots,n)$的最大长度，亦即

$$\eta(P_n)=\max(t_1-t_0, \cdots t_n-t_{n-1})$$

对于区间$[a, b]$的任意分法$P_n$，作和

$$S(P_n) = \sum_{i=1}^{n} x(t_i)[w(t_i) - w(t_{i-1})]$$

如果存在常数$I$，满足下述条件：对任给的$\varepsilon>0$，存在着$\delta>0$，使当$\eta(P_n)<\delta$时，蕴含着

$$|I - S(P_n)| < \varepsilon$$

则称$I$为区间$[a, b]$上函数$x$关于w的 Riemann-Stieltjes 积分，记为

$$I = \int_a^b x(t) dw(t)$$

显然，有

$$\lim \sum_{i=1}^{n} x(t_i)[w(t_i) - w(t_{i-1})] = \int_a^b x(t) dw(t)$$

极限是对$[a, b]$上合于条件：当$n \longrightarrow \infty$时，$\eta(P_n) \longrightarrow 0$的一切分法序列$\{P_n\}$取的。

显然，取$w(t) = t$，积分化为$[a, b]$上的函数$x(t)$的Riemann积分。

如果在$[a, b]$上，$w(t)$可导，则有

$$\int_a^b x(t) dw(t) = \int_a^b x(t) w'(t) dt$$

此积分线性依赖于$x$。亦即对于任意标量$\alpha, \beta$，并且$x_1(t)$，$x_2(t)$都是$[a, b]$上的连续函数，则

$$\int_a^b [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] dw(t) = \alpha \int_a^b x_1(t) dw(t) + \beta \int_a^b x_2(t) dw(t)$$

另一方面，积分亦线性依赖于$w \in V[a, b]$。亦即对于

任意的$w_1$，$w_2 \in V[a, b]$和任意标量$\alpha$，$\beta$，则

$$\int_a^b x(t)d\Big(\alpha w_1(t)+\beta w_2(t)\Big)=\alpha\int_a^b x(t)dw_1(t)+$$

$$\beta\int_a^b x(t)dw_2(t)$$

另外还有

$$\left|\int_a^b x(t)dw(t)\right|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\,Var(w)$$

# 第二章　度量空间

度量空间在泛函分析中是最为基础的，这是因为它们对于泛函分析而言，与微积分中实数直线$R$起着同等重要的作用。实际上，作为$R$的推广，他们为分析中各分支的重要问题的描述提供了基础。

## §1　度量空间

**1.1　定义**　**度量空间**是一个序对$(X, d)$，其中$X$是一个集合，而$d$是$X$上的一个**度量**（或称为$X$上的度量函数）。亦即，定义在$X \times X$(*)上的二元函数，对于一切$x, y, z \in X$，总有

(M1)　$d$是实值、有限且非负的；

(M2)　$d(x, y)=0$ 当且仅当$x=y$；

(M3)　$d(x, y)=d(y, x)$；

(M4)　$d(x, y) \leqslant d(x, z)+d(z, y)$。

以后，常称$X$是$(X, d)$的**基集**；它的元称为**点**，对于固定的$x, y$，我们称非负实数$d(x, y)$为从$x$到$y$的**距离**。性质(M1)到(M4)称为**度量公理**，(M4)命名为**"三角不等式"**，完全是从初等几何学导入的。

---

(*)　记号×表示集合的Cartan积：$E \times F$即为所有序对$(a, b)$的集合，其中$a \in E$，而$b \in F$。因此，$X \times X$是$X$的所有元构成的序对之集合.

借助于$(M4)$还可导出一个**广义三角不等式**：对于$x_i\in(X, d)(i=1, 2, \cdots, n)$，有

$$d(x_1, x_n)\leqslant d(x_1, x_2)+d(x_2, x_3)+\cdots+d(x_{n-1}, x_n) \tag{1}$$

如果不会发生混淆，也将$(X, d)$简写成$X$。

取一个子集$Y\subset X$，且限制$d$到 $Y\times Y$ 上，即$Y$上的度量为

$$\tilde{d}=d|_{Y\times Y}$$

于是得到度量空间$(X,d)$的一个子空间$\left(Y, \tilde{d}\right)$，其中$\tilde{d}$称为$Y$上由$d$所诱导的度量。

下面举几个例子。

**1.2 实直线$R$和Euclid平面$R^2$** 在$R$中，通常定义其度量为

$$d(x, y)=|x-y| \tag{2}$$

在Euclid平面$R^2$中，其元是有序实数对$x=(\xi_1, \xi_2)$，Euclid度量定义成

$$d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2} \tag{3}$$

其中$y=(\eta_1, \eta_2)$，则$R^2$是度量空间。

如果对$R^2$定义另一个度量

$$d_1(x, y)=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2| \tag{4}$$

则$(R^2, d_1)$构成另一个度量空间。

这说明了一个极重要的事实：从一个给定的（具有不止一个元的）基集出发，可以选择不同的度量作成不同的度量空间。

**1.3 Euclid空间$R^n$，酉空间$C^n$** $R^n$由$n$个有序实数的全体所组成，其元为$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n)$

等等。Euclid度量通常定义成

$$d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2} \tag{5}$$

显然，例1.2中的$R$和$R^2$都是$n$维Euclid空间$R^n$的特例。

$n$维酉空间$C^n$是由$n$个有序的复数的全体组成的空间，其度量为

$$d(x,y)=\sqrt{|\xi_1-\eta_1|^2+|\xi_2-\eta_2|^2+\cdots+|\xi_n-\eta_n|^2} \tag{6}$$

当$n=1$时即得复平面，其度量通常定义成

$$d(x,y)=|x-y| \tag{7}$$

**1.4 序列空间$l^\infty$** 本例和下例将首次给出极为一般的度量空间。取一切有界复数序列作成的集为基集$X$，亦即$X$的每一个元是一个复序列：$x=(\xi_1, \xi_2,\cdots)$，简记为$x=(\xi_i)$，使得对于一切$i=1, 2,\cdots$，都有$|\xi_i|\leqslant M_x$，其中$M_x$是一个依赖于$x$但不依赖于$i$的实数。对于$y=(\eta_i)\in X$，我们定义度量为

$$d(x, y)=\sup_{i\in N}|\xi_i-\eta_i| \tag{8}$$

这里$N=\{1, 2,\cdots\}$。这样得到的度量空间表示成$l^\infty$，称$l^\infty$为序列空间是因为$X$的每一个元(或每一个点)是一个序列。

**1.5 函数空间$C[a, b]$** 我们取仅一个独立变数$t$的，并在给定闭区间$[a, b]$上有定义且连续的实值函数$x$，$y$，…全体作成的集合为基集$X$，同时定义其度量为

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{9}$$

所得到的度量空间记为$C[a,b]$。称它为函数空间是因为$C[a, b]$中的每个元都是一个函数。

**1.6 离散度量空间** 任取一个非空集合$X$，$X$上的所谓

离散度量定义成

$$d(x, x)=0; \quad d(x, y)=1, \quad (x \neq y)$$

则$(X, d)$称为离散度量空间。在应用中它很少出现，但是，我们将借助它来说明某些概念。

### 习　题

1. 证明$d(x, y)=\sqrt{|x-y|}$是实数集上的一个度量。

2. 假设$d$是$X$上的一个度量，决定常数$k$，使得(i)$kd$；(ii)$d+k$也是$X$上的度量。

3. 证明：$d(x, y)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|$是$R^n$中的一个度量，其中$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots\xi_n)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots\eta_n)$。

4. 如果$A$是$l^\infty$的一个子空间，它由数0和1的序列的全体构成，则$A$上的诱导度量是什么？

5. 证明：在1.5定义的基集$X$上，$\tilde{d}(x, y)=\int_a^b|\tilde{d}(t)-y(t)|dt$是其上的另一个度量。因而$(X, \tilde{d})$是另一个度量空间。

6. 利用三角不等式(M4)证明

$$|d(x, y)-d(y, z)|\leqslant d(x, y)$$

## §2　和的Hölder不等式与Minkowski不等式

本节首先研究无论在理论上，还是在应用中都十分重要的Hölder不等式和Minkowski不等式。然后，再进一步列举出几个重要的度量空间。

**2.1　引理（W.H. Young不等式）**　对于任意两个正数$A$, $B$, $p$, $q$为一对共轭指数（即$p>1$, $1/p+1/q=1$），则

$$A^{1/p}B^{1/q} \leqslant \frac{A}{p} + \frac{B}{q} \tag{1}$$

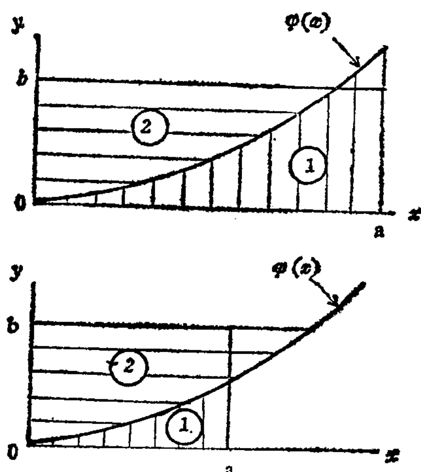



图2-1 不等式(1)图示

**证** 假设$y=\varphi(x)$ $(x\geqslant 0)$ 是严格单调递增的连续函数，$\varphi(0)=0$; $x=\overline{\varphi}(y)$ 是$\varphi$的反函数 $(y\geqslant 0)$ 如图2-1，显然有不等式

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx + \int_0^b \overline{\varphi}(y)\,dy \geqslant ab \tag{2}$$

对一切$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$成立，当$b=\varphi(a)$时，不等式化为等式。特别，取$\varphi(x)=x^{p-1}$，$\overline{\varphi}(y)=y^{q-1}$，$a=A^{1/p}$，$b=B^{1/q}$即得到(1)式。

注意：当$A=0$或$B=0$；或$A=B=0$时，不等式(1)仍成立。

如果实数$p\geqslant 1$，使得级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p=|\xi_1|^p+|\xi_2|^p+\cdots$收敛的序列$x=(\xi_i)$全体作成的集合记为$l^p$，则有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<+\infty \qquad (p\geqslant 1\text{固定}) \tag{3}$$

如果每一个元 $x=(\xi_i)\in l^p$，其分量$\xi_i$（$i=1,2,\cdots$）是复数，就称其为复空间$l^p$；如果分量$\xi_i$是实数，则称其为实空间$l^p$。

**2.2 引理**（**Hölder不等式**） 设$p$，$q$为一对共轭指数；$1<p<+\infty$，$1/p+1/q=1$，则对于任意的$x=(\xi_i)\in l^p$，$y=(\eta_i)\in l^q$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^q\right)^{1/q} \tag{4}$$

**证** 假设$(\tilde{\xi}_i)$和$(\tilde{\eta}_i)$满足条件

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{\xi}_i|^p=1 \text{ 和} \sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{\eta}_i|^p=1 \tag{5}$$

由引理2.1和（1）式，取$A=|\tilde{\xi}_i|$，$B=|\tilde{\eta}_i|$，则有

$$|\tilde{\xi}_i\tilde{\eta}_i|\leqslant\frac{1}{p}|\tilde{\xi}_i|^p+\frac{1}{q}|\tilde{\eta}_i|^q \tag{6}$$

将（6）式两端对$i$求和，使用（5）式，得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{\xi}_i\tilde{\eta}_i|\leqslant\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{\xi}_i|^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{\eta}_i|^q$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{7}$$

现在对于$x=(\xi_i)\in l^p$，$y=(\eta_i)\in l^q$，作

$$\tilde{\xi}_i=\frac{\xi_i}{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p}},\quad \tilde{\eta}_i=\frac{\eta_i}{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{1/q}} \tag{8}$$

显然满足条件（5），又使用（7）式便得到（4）。

此不等式于1889年首先为Hölder证明。

注意：在不等式（4）中，取$p=2$，则$q=2$，（4）式化为Cauchy-Schwarz不等式：

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2}\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^2} \tag{9}$$

**2.3 引理（Minkowski不等式）** 假设$1\leqslant p<+\infty$，且$1/p+1/q=1$，对于任意的$x=(\xi_i)\in l^p$，$y=(\eta_i)\in l^p$，则有

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta|_m^p\right)^{1/p} \tag{10}$$

**证** 当$p=1$时，结论显然成立。不妨设$p>1$。因为

$|\xi_i+\eta_i|^p=|\xi_i+\eta_i||\xi_i+\eta_i|^{p-1}\leqslant(|\xi_i|+|\eta_i|)\cdot$
$|\xi_i+\eta_i|^{p-1}$

将上式对下标$i$从1到某自然数$n$求和，得到

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^p\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i||\xi_i+\eta_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|\eta_i||\xi_i+\eta_i|^{p-1} \tag{11}$$

由于$(p-1)q=p$，对（11）式右端使用Hölder不等式，推得

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^p\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{n}|\xi_m+\eta_m|^{(p-1)q}\right)^{1/q}+$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{n}|\xi_m+\eta_m|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{m=1}^{n}|\xi_m+\eta_m|^p\right)^{1/q} \tag{12}$$

在（12）式中，用右端最后一个因式去除（12）式的两边，得出

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^{n}|\eta_m|^p\right)^{1/p} \tag{13}$$

因为$x$，$y\in l^p$，故在（13）中令$n\to\infty$取极限，右端二级数收敛，因而左端级数亦收敛，即得（10）式。

不等式（10）在有限和的情形，于1896年首先由Minkowski证明。

**2.4 空间$l^p$** 对于任意的$x=(\xi_i)\in l^p$，$y=(\eta_i)\in l^p$，定义度量为

$$d(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{1/p} \tag{14}$$

则度量公理（$M1$）～（$M3$）显然成立。又利用Minkowski不等式（10），易证三角不等式（$M4$）亦成立，因此，$l^p$是度量空间。

特别，当$p=2$时，$l^2$空间是一个极为重要的空间。

**2.5 序列空间$s$** 此空间由一切复数序列作成。对于任意的$x=(\xi_i)\in s$，$y=(\eta_i)\in s$，定义其度量为

$$d(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|} \tag{15}$$

则$s$是度量空间。

公理（$M1$）～（$M3$）显然，只需证明（$M4$）。为此，作函数

$$f(u)=\frac{u}{1+u}\qquad (u\geqslant 0)$$

求导，得到$f'(u)=\frac{1}{(1+u)^2}>0$（$u\geqslant 0$），所以函数单增。

于是，对于任意复数$A,B$，均有$f(|A+B|)\leqslant f(|A|+|B|)$，因此

$$\frac{|A+B|}{1+|A+B|}\leqslant\frac{|A|+|B|}{1+|A|+|B|}$$

$$=\frac{|A|}{1+|A|+|B|}+\frac{|B|}{1+|A|+|B|}$$

$$\leqslant\frac{|A|}{1+|A|}+\frac{|B|}{1+|B|}$$

在上式中，取$A=\xi_i-\zeta_i$，$B=\zeta_i-\eta_i$，其中 $z=(\zeta_i)\in s$，则$A+B=\xi_i-\eta_i$，所以

$$\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}\leqslant\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|}+\frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}$$

再将上不等式两端乘以$\frac{1}{2^i}$，对$i$从1到$\infty$求和，即得三角不等式

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

**2.6 有界函数空间$B[a,b]$** 空间$B[a,b]$中的每一个元都是区间$[a,b]$上的有界函数。假设任意的$x(t)$，$y(t)$

$\in B[a, b]$，定义其度量为

$$d(x, y)=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{16}$$

因为对于任意的$z(t)\in B[a, b]$，都有

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|$$
$$\leqslant\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|$$

则$x-y$在$[a, b]$上有界，又上式右端不依赖于$t$，故左端取上确界后不等式仍成立。于是，得到三角不等式（$M4$）。其余显然。据此，$B[a, b]$是度量空间。

## 习　题

1．证明：Cauchy-Schwarz不等式（9）蕴含不等式$(|\xi_1|+\cdots+|\xi_n|)^2\leqslant n(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2)$。

2．给出一序列$x=(\xi_i)$是$l^p$的点，但$x\notin l^1$，其中$p>1$。

3．（直径、有界集）度量空间$(X,d)$中的非空集合$A$的直径$\delta(A)$如下定义：$\delta(A)=\sup_{x,y\in A}d(x, y)$

$A$称为是有界的，如果$\delta(A)<+\infty$。证明：如果$A\subset B$，则$\delta(A)\leqslant\delta(B)$。

4．证明：$\delta(A)=0$当且仅当$A$是一个单点集。

5．（集之间的距离）度量空间$(X, d)$的二非空子集$A$，$B$之间的距离$D(A, B)$定义成

$$D(A, B)=\inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}}d(a, b)$$

证明：若$A\cap B\neq\phi$，则$D(A, B)=0$。反之，会有什么结果呢？

6．如果$(X, d)$是任意度量空间，证明

$$\tilde{d}(x, y)=\frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$$

也是$X$上的度量．同时，在此度量下，$X$有界．

7．（度量空间的积空间）两个度量空间$(X_1, d_1)$和$(X_2, d_2)$的Cartain积$X=X_1\times X_2$可以有多种方式构成度量空间．例如：对于

$x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$，可以取

$$d(x, y)=d_1(x_1, y_1)+d_2(x_2, y_2)$$

$$\tilde{d}(x, y)=\sqrt{[d_1(x,y)]^2+[d_2(x,y)]^2}$$

$$\tilde{\tilde{d}}(x,y)=\max[d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)]$$

证明上述论断．

## §3 开集、闭集、邻域

为了研究度量空间中的收敛、其上的连续映射以及空间的完备性等一系列更深入的性质，必须讨论度量空间中的点集，以及围绕着点集的一些基本概念。值得指出的是：一般度量空间中的点集与直线上的点集有着相似的一些性质，甚至使用完全相同的术语，但是，也有与直线上点集不同的若干独特的性质，应该注意区别。

**3.1 定义** 取定一点$x_0\in X=(X,d)$和一个实数$r>0$，则满足下列条件的集合：

$$\begin{aligned}&(\text{I})\ B(x_0, r)=\{x\in X \mid d(x, x_0)<r\}\\&(\text{II})\ \tilde{B}(x_0, r)=\{x\in X \mid d(x, x_0)\leq r\}\\&(\text{III})\ S(x_0, r)=\{x\in X \mid d(x, x_0)=r\}\end{aligned}\tag{1}$$

分别称为以点$x_0$为中心，以$r$为半径的（Ⅰ）**开球**；（Ⅱ）**闭球**；（Ⅲ）**球面**。

显然，$\tilde{B}(x_0, r)=B(x_0, r)\cup S(x_0, r)$。

在度量空间$X$中，球面$S(x_0, r)$可能是空集$\phi$，这与欧氏空间不同。例如，$X$是离散度量空间，若$r\neq 1$，则$S(x_0,r)=\phi$。若$r=1$，则$S(x_0, r)=X-\{x_0\}$。

**3.2 定义** 度量空间$X$的子集$A$称为**开集**，如果它包含

每一点为中心的一个开球，$X$的子集$K$称为**闭集**，如果它（关于$X$）的余集是开集，亦即$K^c = X - K$是开集。

从定义3.2易知，开球是开集，闭球是闭集。

半径为$\varepsilon$的开球$B(x_0, \varepsilon)$常称为点$x_0$的**ε-邻域**。点$x_0$的$\varepsilon$-邻域的一个特征是：任意包含$x_0$的$X$的子集$A$都包含至少一个$x_0$的$\varepsilon$-邻域，这就是说，$x_0$总是它的每一个邻域的公共点。据此，如果$F$是$x_0$的一个邻域，又$F \subset A$，也称$A$是$x_0$的邻域。

为了应用上的方便，我们规定$X$和$\phi$既是开集也是闭集。

我们称点$x_0$是集$A \subset X$的一个**内点**，如果$A$是$x_0$的一个邻域。$A$的**内部**是$A$的全体内点的集合，记为$A^\circ$或Int$(A)$。Int$(A)$是开集，并且是$A$所包含的最大开集。

空间$X = (X, d)$的开集簇$\mathscr{T}$具有下述性质：

（$T1$）$\phi \in \mathscr{T}$，$X \in \mathscr{T}$；

（$T2$）$\mathscr{T}$中任意多个开集的并集仍是$\mathscr{T}$的元；

（$T3$）$\mathscr{T}$中有限多个元的交集仍是$\mathscr{T}$的元。

**证**　（$T1$）显然。因为开集的并集的任意点$x$仍属于这些集之一，不妨设它在集$A$中，则$A$包含$x$的一个邻域$F$，又由并集的定义，则$F$必含于并集中，这就得到（$T2$）。最后，如果$y$是开集$A_1$，…，$A_n$的交集的任一点，则每一个$A_k$都含有$y$的一个邻域$G$，同时，这些邻域中最小的一个都含于交集中，这就证明了（$T3$）。

上面提到的性质（$T1$）到（$T3$）是如此基本，以致人们希望在更一般的情况之下仍能保持这些性质。

**3.3 定义**　给定集合$X$，如果集$X$和由$X$的子集作成的一个集簇$\mathscr{T}$，满足公理（$T1$）到（$T3$），则称$(X, \mathscr{T})$为**拓扑**

**空间**，集簇$\mathscr{T}$称为$X$的一个**拓扑**。

由定义3.3，则有结论：**度量空间是拓扑空间。**

**3.4 定义** 令$X=(X, d)$和$Y=(Y, \tilde{d})$都是度量空间。映射$T$：$X\to Y$称为在$x_0\in X$是**连续**的，如果对于任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对于满足条件$d(x, x_0)<\delta$的一切$x$，都有$\tilde{d}(Tx, Tx_0)<\varepsilon$。

称$T$为**连续映射**，如果它在$X$内每一点都连续（图2-2）

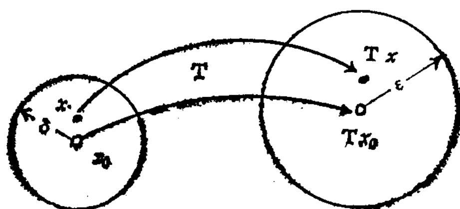



图2-2 连续映射在$R^2$中的说明

一个重要而有趣的事实是：连续映射可以作为开集的特征。

**3.5 定理** 度量空间$X$到度量空间$Y$里的映射$T$连续的充要条件是$Y$中的任意开子集的逆象集是$X$的开子集。

**证** 必要性。假设$S\subset Y$是开集，且$S_0$是$S$逆象集，如果$S_0=\phi$，则它是开集，已证。现设$S_0\neq\phi$，对于任意的$x_0\in S_0$，令$y_0=Tx_0$，因为$S$是开集，它必含有$y_0$的一个$\varepsilon$-邻域$E$，由于$T$连续，$x_0$必有一个$\delta$-邻域$E_0$映射到$E$。然而，$E\subset S$，必有$E_0\subset S_0$，于是，由$x_0$的任意性，$S_0$是开集。

充分性。假设$Y$中每一个开集的逆象集都是$X$中的开集，则对于每一个$x_0\in X$，$Tx_0$的任意$\varepsilon$-邻域为$E$，因为$E$是开集，$E$的逆象集$E_0$亦是开集，并且$E_0$包含$x_0$。又因为$E_0$映入$E$中，

所以$E_0$中含$x_0$的一个$\delta$-邻域映入$E$中，由定义3.4，$T$ 在点$x_0$处是连续的，再由$x_0$的任意性，$T$在$X$上连续。

**3.6 定义** 假设$A$是度量空间$X$的子集，则点$x_0 \in X$ 称为$A$的**聚点**（或$A$的**极限点**），如果$x_0$的每一个邻域都包含异于$x_0$的至少一点$y \in A$。

集$A$的全体聚点作成的集称为$A$的**导集**，记为$A'$。

集$A$与其导集$A'$的并集称为$A$的**闭包**，记为$\overline{A}$。即，

$$\overline{A} = A \cup A'。$$

**3.7 引理** 设$A$是度量空间$X$的子集，则$A$是闭集的充要条件为 $A = \overline{A}$。

**证** 必要性。只需证明$\overline{A} \subset A$。假设$x \notin A$则$x \in A^c$，因为$A$是闭集，则$A^c$是开集，必有$x$的某邻域$B(x, \delta) \subset A^c$，亦即$B(x, \delta) \cap A = \phi$，于是$B(x, \delta)$中不含$A$的任何点，故$x \notin A'$，因此，$x \notin A \cup A' = \overline{A}$，所以$\overline{A} \subset A$。

充分性。只需证明$A^c$是开集即可。已知$A = \overline{A}$，如果$x \notin A$，则$x \notin A'$，但$x \in A^c$，因此必存在邻域 $B(x, \delta)$ 不含$A$的点，因此，$B(x, \delta) \cap A = \phi$，$B(x, \delta) \subset A^c$，$A^c$是开集。

例如：$Z$表示有理数集，则$\overline{Z} = R$。又如，$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$，则$\overline{A} = A \cup \{0\} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$。

显然，集$A$的闭包$\overline{A}$是包含$A$的最小闭集。

**3.8 定义** 度量空间$X$的子集$A$称为在$X$中**稠**，如果$\overline{A} = X$。

空间$X$称为是**可分**的，如果它包含一个可数稠集。

如果$A$在$X$中稠，则$X$中的每一个球无论怎样小，都要包含$A$的点。换言之，在此种情况，找不到点$x\in X$有一个邻域不包含$A$的点。

后面会看到可分的度量空间比不可分的度量空间要简单一些。现在，我们列举出可分和不可分度量空间的例子，以便帮助理解这些概念。

**3.9 实直线$R$** 实直线$R$是可分的。

**证** 有理数集$Z\subset R$可数且在$R$中稠。

**3.10 复平面$C$** 复平面$C$是可分的。

**证** $C$的一个可数稠子集是其实部和虚部都是有理数的全体复数作成的集合。

**3.11 离散度量空间** 离散度量空同$X$可分的充要条件是$X$可数。

**证** 空间$X$中的离散度量$d$使得没有$X$的真子集在$X$中稠，因此$X$中的稠子集唯有它自己，从而得出论断。

**3.12 空间$l^p$** 空间$l^p$（$1\leqslant p<+\infty$）是可分的。

**证** 仅对实$l^p$空间进行证明，结论对复$l^p$空间亦成立。

假设$A$是形如$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, 0,0,\cdots)$的序列的全体作成的集合，其中$n$是正整数，$\eta_i(i=1,2,\cdots,n)$是有理数。显然$A\subset l^p$，同时$A$可数。下面，只需证明$A$在$l^p$中稠即可。

假设任意元$x=(\xi_i)\in l^p$，则$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<+\infty$。任给$\varepsilon>0$，存在着正整数$n=n(\varepsilon)$，使得$\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\frac{1}{2}\varepsilon^p$。因为$\xi_i\in R$

$(i=1,2,\cdots, n)$，又$\overline{Z}=R$，因此，对于每个$\xi_i$，必存在 $\eta_i\in Z$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 使得$\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p<\frac{1}{2}\varepsilon^p$，则由这些$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$决定了A中的元$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,0,0,\cdots)$，并且有

$$[d(x,y)]^p=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p+\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}+\frac{\varepsilon^p}{2}=\varepsilon^p$$

所以$d(x,y)<\varepsilon$，由$x$的任意性，说明$A$在$l^p$中稠。

**3.13 空间$l^\infty$** 空间$l^\infty$不可分。

**证** 令$y=(\eta_i)=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$是$\eta_i$作成的序列，其中$\eta_i$或为0，或为1，则$y\in l^\infty$。显然，对于这样的$y$，必有一个二进制实数

$$\hat{y}=\frac{\eta_1}{2}+\frac{\eta_2}{2^2}+\frac{\eta_3}{2^3}+\cdots$$

与之一一对应，于是$\hat{y}\in[0,1]$。因为$[0,1]$中每一个点都可以表成一个二进制小数，所以这样的$\hat{y}$有不可数个，故对应的0、1构成的序列$y=(\eta_i)$也有不可数个，并且这样的序列两两不相等，即$x=(\xi_i)\neq(\eta_i)=y$。但是

$$d(x,y)=\sup_{i\in N}|\xi_i-\eta_i|=1$$

以这样的点为中心作半径$r=1/3$的球，则此种球两两不相交且有不可数无穷多个。

假设$A$是空间$l^\infty$中的任意稠集，$\overline{A}=l^\infty$，那么，这不可数无穷多个小球都应该至少包含$A$的一点，于是，$A$应是不可数集。由$A$的任意性，$l^\infty$不可分。

## 习 题

1．考虑$C[0, 2\pi]$，确定最小的正数$r$，使得$y\in\tilde{B}(x,r)$，其中 $x(t)=\sin t$ $y(t)=\cos t$。

2．写出下列子集的闭包：(i) $R$上的整数集；(ii) $R$ 上的 有理数集；(iii) 圆盘$A=\{z|_{|z|<1}\}\subset C$。

3．证明：$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$；$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$。

4．证明：度量空间$X$可分的充要条件是$X$有一个可数子集$Y$具有下述性质：对于任给的$\varepsilon>0$和每一个$x\in X$，存在着$y\in Y$，使得$d(x, y)<\varepsilon$。

5．证明：一开集的象在连续映射下不必是开集。

6．证明：映射$T:X\to Y$连续当且仅当闭集$E\subset Y$的逆象也是 $X$ 中的闭集。

7．若映射$F:C^1[0, 1]\to R$定义成

$$F(x(t))=\int_0^1\sqrt{1+[x'(t)]^2}\,dt$$

其中$x(t)\in C^1[0、1]$，则此映射$F$在$C^1[0, 1]$上连续吗？

(注：$C^1[a, b]$表示区间$[a, b]$ 上全体一阶连续可微函数作成的空间，对于任意的$x(t)\in C^1[a, b]$，$y(t)\in C^1[a, b]$，定义

$$d(x, y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|+\max_{t\in[a,b]}|x'(t)-y'(t)|)$$

8．证明空间$B[a, b]$ $(a<b)$ 是不可分的。

# §4 收敛性、Cauchy序列、完备性

在微积分中，实数列起了重要作用，正是$R$ 上的度量，使得我们能够定义序列收敛这样基础的概念。（当然，对于复数列可以进行同样的讨论，这时必须使用复平面上的度量。）在一个度量空间$X=(X, d)$中，情形是十分相似的。亦即，可以研究$X$的点列$\{x_n\}$：$x_1$，$x_2\cdots$，使用度量$d$来定义

完全类似于微积分中的收敛性。

**4.1 定义** 度量空间$X=(X, d)$的序列$\{x_n\}$称为是**收敛**的，如果存在元$x\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x)=0$$

元$x$称为$\{x_n\}$的**极限**，记为：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$。或简记为：$x_n\to x$。我们也说$\{x_n\}$收敛于$x$或有极限$x$，如果$\{x_n\}$不收敛，则说它是**发散**的。

在定义4.1中看到，由$d$决定了一个实数列$r_n=d(x_n, x)$，它的收敛性决定了点列$\{x_n\}$的收敛性。所以，如果$x_n\to x$，对给定$\varepsilon>0$，则存在着$N(\varepsilon)>0$，当$n>N(\varepsilon)$时，一切$x_n$都将落在$x$的$\varepsilon$-邻域$B(x, \varepsilon)$中。

值得注意的是：一个收敛序列的极限必须是空间$X$的一点。例如，设$X$是$R$中的区间$(0, 1)$，则在度量$d(x, y)=|x-y|$下，序列$\{x_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}=\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right)$不收敛。因为此序列当$n\to\infty$时可能的极限点$x=1$不在$X$中。以后，我们都采用这种观点。

我们称一个非空子集$A\subset X$是**有界**的，如果它的直径

$$\delta(A)=\sup_{x, y\in A} d(x, y)$$

有限。称$X$中的序列$\{x_n\}$是**有界序列**，如果对应的点集是$X$的有界子集。

显然，如果集$A$有界，则$A\subset B(x_0, r)$，其中$x_0\in X$是任意一点，而$r$是一个（充分大）正实数。

**4.2 引理** 设$X=(X, d)$是度量空间，则

（Ⅰ）$X$中的收敛点列是有界的，并且它的极限唯一。

（Ⅱ）如果在 $X$ 中有 $x_n \to x$，$y_n \to y$，则 $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$。

**证** （Ⅰ）假设$x_n \to x$，则取$\varepsilon = 1$，可找到 $N$，使得对于一切的 $n > N$，有 $d(x_n, x) < 1$，因此由三角不等式($M4$)，对于全体$n$，都有 $d(x_n, x) < 1 + M$，其中$M = \max\{d(x_1, x), \cdots, d(x_N, x)\}$，所以$\{x_n\}$有界。现在，假定$x_n \to x$，且$x_n \to z$，由（$M4$）得到

$$0 \leqslant d(x, z) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, z) \to 0$$

再由（$M2$）推得$x = z$，于是极限是唯一的。

（Ⅱ）由广义三角不等式§1（1）式，

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

因此，得到

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

另一方面，

$$d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$$

得到

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

总之，有

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

对于任给的$\varepsilon > 0$，因为$x_n \to x$，存在 $N_1$，对于全体 $n > N_1$，$d(x_n, x) < \varepsilon/2$。又因为$y_n \to y$，存在$N_2$，使得对于全体$n > N_2$，$d(y_n, y) < \varepsilon/2$，取$N = \max\{N_1, N_2\}$，则对于全体$n > N$，都有

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon。$$

**4.3 定义** 度量空间$X = (X, d)$中的序列$\{x_n\}$称为是

Cauchy**序列**（或叫**基本列**），如果对于任给的$\varepsilon>0$，存在着$N>0$，使得对于所有的$m$，$n>N$，都有$d(x_m, x_n)<\varepsilon$。

度量空间$X$称为是**完备**的，如果$X$中的每一个 Cauchy 序列都收敛。

注意：在实直线$R$上，由Cauchy收敛准则，数列$\{x_n\}\in R$收敛的充要条件是$\{x_n\}$为Cauchy序列（或基本列）。但是，这一结论在一般度量空间却可能不成立。为此，我们才特别需要区分出完备的和不完备的度量空间。在完备的度量空间中，收敛序列与Cauchy序列是彼此等价的，而在不完备度量空间中（稍后就知道），Cauchy序列仅仅是收敛序列的必要条件。

另一方面，度量空间的完备性总是在某一特定度量之下来说的。如果同一基集上定义另一个度量，则原来空间的完备性一般会发生改变。例如：空间R在度量$d(x, y)=|x-y|$下是完备的，但在度量$\tilde{d}(x, y)=|\mathrm{arc\,tg}x-\mathrm{arctg}y|$下则不完备。

**4.4 定理** 度量空间中的收敛序列必定是Cauchy序列。

**证** 设$\{x_n\}$是度量空间$(X, d)$中的点列，$x_n\longrightarrow x$，$x\in X$，则对于任给的$\varepsilon>0$，存在着$N(\varepsilon)>0$，使得对于一切$n>N$，有

$$d(x_n, x)<\varepsilon/2$$

又由（$M4$），对于所有的$m$，$n>N(\varepsilon)$，得到

$$d(x_m, x_n)\leqslant d(x_m, x)+d(x, x_n)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

因此，$\{x_n\}$是Cauchy序列。

下面介绍几个以后常用的结论。

**4.5 定理** 设$A$是度量空间$(X, d)$的非空子集，则

（Ⅰ）$x\in\overline{A}$当且仅当存在着$A$中的序列$\{x_n\}$，使得

$x_n \to x$，$(n \to \infty)$

（Ⅱ）$A$是闭集当且仅当若$\{x_n\} \in A$，且$x_n \to x$，蕴含$x \in A$。

**证**　（Ⅰ）假设$x \in \overline{A}$，如果$x \in A$，则只需作点列$(x, x, \cdots)$即可，如果$x \notin A$，则它是$A$的一个聚点，因此，每一个球$B(x, 1/n)$都至少含一点$x_n \in A$ $(n=1, 2, \cdots)$，且有$d(x_n, x) < 1/n$，当$n \to \infty$时，$0 \leqslant d(x_n, x) < 1/n \to 0$，于是$x_n \to x$。

反之，如果$\{x_n\} \in A$，且$x_n \to x$，则$x \in A \subset \overline{A}$；或者$x$的每一个邻域$B(x, 1/n)$至少含有一点$x_n \neq x$，因此$x$是$A$的聚点，$x \in A'$，所以$x \in \overline{A}$。

（Ⅱ）由引理3.7，和（Ⅰ）可推得（Ⅱ）。

此定理实际指出：集$A$的聚点即是$A$中的点列的极限点，这就是也称它为极限点的原因。同时，若$A$是闭集，则必包含它所有的聚点（极限点）。

**4.6 定理**　完备度量空间$X$的子空间$A$是完备的当且仅当$A$是$X$的闭集。

**证**　设$A$是完备的，由定理4.5(Ⅰ)，对于任意的$x \in \overline{A}$，在$A$中存在着序列$\{x_n\}$收敛于$x$，又根据定理4.4，$\{x_n\}$是Cauchy序列，因此$x \in A$。再由$x$的任意性和引理3.7，$A$是闭集。

反之，假设$A$是闭集，且$\{x_n\}$是A中的Cauchy序列，则

$x_n \longrightarrow x \in X$，由定理4.5(Ⅰ)，得到$x \in \overline{A}$，再由假设$A = \overline{A}$，所以$x \in A$，因此A中的任意Cauchy序列收敛，故$A \subset X$完备。

从下一定理可以看到，序列的收敛性对于连续映射也是十分重要的。

**4.7 定理** 度量空间$(X, d)$到度量空间$(Y, \tilde{d})$中的映射$T: X \to Y$，在点$x_0 \in X$连续当且仅当$x_n \longrightarrow x_0$蕴含着$Tx_n \to Tx_0$。

**证** 设$T$在$x_0$连续，根据定义3.4，对于任给$\varepsilon > 0$，存在着$\delta > 0$，使得$d(x, x_0) < \delta$蕴含$\tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$。令$x_n \to x_0$，则存在$N > 0$，使得对于一切$n > N$，都有$d(x_n, x_0) < \delta$，因此，对于所有的$n > N$，$\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$，由定义，这意味着$Tx_n \to Tx_0$。

反之，假设$x_n \longrightarrow x_0$蕴含$Tx_n \longrightarrow Tx_0$，现在来证明映射$T$在点$x_0$连续。假设此结论不真，则必存在这样的$\varepsilon > 0$，使得对于任意的$\delta > 0$存在着$x \neq x_0$，有$d(x, x_0) < \delta$，但$\tilde{d}(Tx, Tx_0) \geqslant \varepsilon$，特别取$\delta = 1/n$，存在着$\{x_n\} \in X$，使得$d(x_n, x_0) < 1/n$，但$\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geqslant \varepsilon$。前一条件得到$x_n \to x_0$，后一条件说明$Tx_n$不收敛$Tx_0$，这与$x_n \to x_0$蕴含$Tx_n \to Tx$的假设矛盾。

## 习　题

1. 如果度量空间$X$的序列$\{x_n\}$收敛，且极限为$x$，证明$\{x_n\}$的每个子序列$\{x_{n_k}\}$也收敛，并且有相同的极限$x$。

2. 证明：$x_n \to x$的充要条件是对$x$的任意邻域$V$，都存在正整数$n_0$，使得对于一切$n > n_0$，$x_n \in V$。

3. 如果$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是度量空间$(X, d)$的Cauchy序列，证明：$\{a_n\}$收敛，其中$a_n = d(x_n, y_n)$。

4. 若$d_1$和$d_2$为同一集$X$上的度量，且存在正数$a$，$b$，使得对于一切$x$，$y \in X$，都有

$ad_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant bd_1(x, y)$

证明：在空间 $(X, d_1)$ 和 $(X, d_2)$ 中，其Cauchy 序列是相同的。

5．利用$R$的完备性，证明复平面$C$的完备性。

## §5 例、完备性的证明

由于度量空间X的完备性与其度量密切相关，因此，空间完备性问题的讨论就比较复杂。这里，列举一些常用的完备度量空间，在证明过程中，大都要用到实直线$R$和复平面$C$的完备性。

**5.1 欧氏空间$R^n$。** 假设$\{x_m\}$是空间$R^n$中的任意 Cauchy 序列，$x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)}) = (\xi_i^{(m)})$，于是，对于任给的$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使得对一切的$m$，$r > N$，都有

$$d(x_m, x_r) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(r)})^2} < \varepsilon \tag{1}$$

将上式平方，当$m$，$r > N$且$i = 1, 2, \cdots, n$，有

$$(\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(r)})^2 < \varepsilon^2, \quad 即\ |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(r)}| < \varepsilon \ (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

（2）式说明，对于固定的$i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，序列 $(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \cdots)$ 是$R$中的Cauchy序列，因为$R$完备，必有$\xi_i \in R$，使得$\xi_i^{(m)} \longrightarrow \xi_i$ $(m \to \infty)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$。定义$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，显然$x \in R^n$，由（1）式，令$r \to \infty$，则有$d(x_m, x) \leqslant \varepsilon$ $(m > N)$，这说明$x$是序列$\{x_m\}$的极限，$x_m \longrightarrow x$，又由$\{x_m\}$的任意性，所以$R^n$完备。

注意：用同样的方法，可以证明酉空间$C^n$的完备性。

**5.2 空间$l^\infty$是完备的** 设$\{x_m\}$是空间$l^\infty$中的任意Cauchy

序列，其中$x_m=(\xi_i^{(m)})=(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots)$，对于任给的$\varepsilon>0$，存在着$N>0$，使得对一切$m, n>N$，都有

$$d(x_m, x_n)=\sup_i|\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(n)}|<\varepsilon$$

因此，对于固定的$i$，更有

$$|\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(n)}|<\varepsilon \tag{3}$$

这说明对于每一个固定的$i$，序列$(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \cdots)$是数的Cauchy序列。再根据$R$和$C$的完备性，当$m\to\infty$时，必有$\xi_i^{(m)}\to\xi_i$，用这无限多个数$\xi_i$ $(i=1, 2, \cdots)$，我们定义$x=(\xi_i)=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$，现在来证明$x\in l^\infty$以及$x_m\longrightarrow x$。在（3）式中，令$n\to\infty$，得到

$$|\xi_i^{(m)}-\xi_i|\leqslant\varepsilon \tag{4}$$

由于$x_m=(\xi_i^{(m)})\in l^\infty$，对于所有的$i$，存在着实数$Mx_m$，使得$|\xi_i^{(m)}|\leqslant M_{Xm}$，于是由三角不等式，推得

$$|\xi_i|\leqslant|\xi_i-\xi_i^{(m)}|+|\xi_i^{(m)}|\leqslant\varepsilon+M_{xm} \qquad (m>N)$$

此不等式对每一个$i$成立，并且右端与$i$无关，故$(\xi_i)$是一有界序列，所以$x=(\xi_i)\in l^\infty$。又利用（4）式，蕴含

$$d(x_m, x)=\sup_i|\xi_i^{(m)}-\xi_i|\leqslant\varepsilon \qquad (m>N)$$

因此，当$m\to\infty$时，有$x_m\longrightarrow x$。再由$\{x_m\}$的任意性，空间$l^\infty$是完备的。

**5.3 空间c** 空间c由一切收敛的复数序列组成，具有由空间$l^\infty$所诱导出的度量。

空间c是完备的。

**证** 空间c是$l^\infty$的子空间，由例 5.2 和定理4.6，只需证明c是$l^\infty$的闭集就行了。

假设任意的$x=(\xi_i)\in\bar{c}$，根据定理 4.5（Ⅰ），存在着序列$x_n=(\xi_i^{(n)})\in c$，使得$x_n\longrightarrow x$，因此，任给$\varepsilon>0$，存

在$N>0$，使得对于$n\geq N$的一切$n$和所有的$i$，有

$$|\xi_i^{(n)}-\xi_i|\leq d(x_n, x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

特别，当$n=N$时，对一切$i$上式成立。由于$x_N\in c$，则其分量$\xi_i^{(N)}$作成一收敛复数列，然而，每个收敛序列必是Cauchy序列，所以，存在着$N_1$，使得

$$|\xi_i^{(N)}-\xi_k^{(N)}|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (i, k\geq N_1)$$

现在，对于所有的$i$，$k\geq N_1$，使用三角不等式，得到

$$|\xi_i-\xi_k|\leq|\xi_i-\xi_i^{(N)}|+|\xi_i^{(N)}-\xi_k^{(N)}|+|\xi_k^{(N)}-\xi_k|<\varepsilon$$

故序列$x=(\xi_i)$是$C$中的Cauchy序列，又由复平面$C$的完备性，数列$(\xi_i)$收敛，于是$x\in c$。又由$x\in\bar{c}$选取的任意性，所以$c$是$l^\infty$中的闭集。

**5.4 空间$l^p$** 空间$l^p$是完备的，这里$1\leq p<+\infty$。

**证** 设$\{x_m\}$是空间$l^p$中的任意Cauchy序列，其中$x_m=(\xi_i^{(m)})=(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots)$，则对于任给的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得对于所有的$m$，$n>N$，都有

$$d(x_m, x_n)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(n)}|^p\right)^{1/p}<\varepsilon \qquad (5)$$

于是，对每一个$i=1, 2, \cdots$，

$$|\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(n)}|<\varepsilon \qquad (m, n>N) \qquad (6)$$

（6）式指出，对于固定的$i$，$(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \cdots)$是数的Cauchy序列，根据$R$或$C$的完备性，它是收敛数列。当$n\to\infty$时，记$\xi_i^{(n)}\to\xi_i$ $(i=1, 2, \cdots)$。利用这些极限定义$x=(\xi_i)=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$，下面来证明$x\in l^p$和$x_m\to x$。

利用（5）式，对于所有的$m$，$n>N$，有

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(n)}|^p<\varepsilon^p \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

令$n\to\infty$，当$m>N$时得到

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^{(m)}-\xi_i|^p\leqslant\varepsilon^p \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

又令$k\to\infty$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(m)}-\xi_i|^p\leqslant\varepsilon^p \qquad (m>N) \qquad (7)$$

这说明$x_m-x=(\xi_i^{(m)}-\xi_i)\in l^p$，由于$x_m\in l^p$，利用Minkowski不等式，推得

$$x=x_m+(x-x_m)\in l^p$$

另一方面，（7）式中的级数可以表示成$[d(x_m,\ x)]^p$，这就得到$d(x_m,\ x)\leqslant\varepsilon$，亦即$x_n\to x$，再因$\{x_m\}$是$l^p$中任意Cauchy序列，这就推出$l^p$的完备性，其中$1\leqslant p<+\infty$。

**5.5 空间$C[a,\ b]$** 函数空间$C[a,b]$是完备的，其中$[a,\ b]$是$R$上任意给定的闭区间。

**证** 为简便计，我们仅就$C[a,\ b]$中的函数是实值函数的情况进行证明，结论对于复值函数亦成立。

设$\{x_m\}$是$C[a,\ b]$中的任意Cauchy序列。任给$\varepsilon>0$，存在着$N>0$，使得对于全体$m$，$n>N$，都有

$$d(x_m,\ x_n)=\max_{t\in[a,b]}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon \qquad (8)$$

因此，对于任意固定的$t_0\in[a,\ b]$，有

$$|x_m(t_0)-x_n(t_0)|<\varepsilon \qquad (m,\ n>N)$$

这说明$(x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ \cdots,\ x_m(t_0),\ \cdots)$是实数Cauchy序

列，由$R$的完备性，此数列收敛，不妨记为$x_m(t_0)\longrightarrow x(t_0)$，$(m\to\infty)$。使用此种方法在区间$[a, b]$上逐点进行讨论，从而得到函数$x(t)$，现在来证明$x(t)\in C[a, b]$，并且$x_m\to x$。

在（8）中，视$m$为固定的，令$n\to\infty$，当$m>N$时，有

$$\max_{t\in[a,b]}|x_m(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon$$

所以，对于每一个$t\in[a, b]$，总有

$$|x_m(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon\qquad(m>N)$$

说明$x_m(t)$在区间$[a, b]$上一致收敛于$x(t)$，因为$x_m(t)$在$[a, b]$上连续，并且一致收敛，故极限函数$x(t)$是$[a, b]$上的连续函数，所以$x(t)\in C[a, b]$，也有$x_m(t)\longrightarrow x(t)$。故$C[a, b]$完备。

**5.6 定理** 空间$C[a, b]$中的收敛性$x_n\to x$是一致收敛，亦即，在$[a, b]$上$\{x_n\}$一致收敛于$x$。

正是通过空间$C[a, b]$上的度量1.5（9）描述了$C[a, b]$上的一致收敛性，因此，常称度量1.5（9）为一致度量。

为了加深对完备性的理解，我们再看几个不完备度量空间的例子。

**5.7 空间Z** 这是以全体有理数作成的集合为基集，并赋予度量$d(x, y)=|x-y|$构成的度量空间，也称为有理直线，这里，$x, y\in Z$。空间Z是不完备的。读者自证。

**5.8 多项式** 设X是全体多项式作成的集合，并且视它们为区间$[a, b]$上$t$的函数，其上的度量定义成

$$d(x, y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$$

则此度量空间$(X, d)$是不完备的。实际上，多项式序列在$[a, b]$区间上一致收敛于一个连续函数，但不必是一个多

项式。

**5.9 连续函数** 假设在空间$C[0, 1]$上定义度量为

$$\tilde{d}(x, y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dx$$

其中$x(t)$，$y(t)\in C[0, 1]$，则此度量空间（$C[0, 1]$，$\tilde{d}$)不完备。

**证** 容易检验度量公理（$M1$）～（$M3$）成立。因为对于任意$z(t)\in C[0, 1]$，

$$\begin{aligned}\tilde{d}(x, y)&=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt\\&=\int_0^1 |x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|dt\\&\leqslant\int_0^1 |x(t)-z(t)|dt+\int_0^1 |z(t)-y(t)|dt\\&=\tilde{d}(x, z)+\tilde{d}(z, y)。\end{aligned}$$

（$M4$）成立，故（$C[0,1],\tilde{d}$）是度量空间。下证此空间不完备。

作点列

$$x_m(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<\frac{1}{2};\\ m(t-\frac{1}{2}), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant a_m;\quad a_m=\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\\ 1, & a_m<t\leqslant 1。\end{cases}$$

从图2-3明显看出$\{x_m(t)\}\in C[0, 1]$，它是区间$[0, 1]$上的连续函数列。任给$\varepsilon>0$，当$n>m>1/\varepsilon$时

$$\tilde{d}(x_m, x_n)=\int_0^1 |x_m(t)-x_n(t)|dt<\frac{\varepsilon}{2}$$

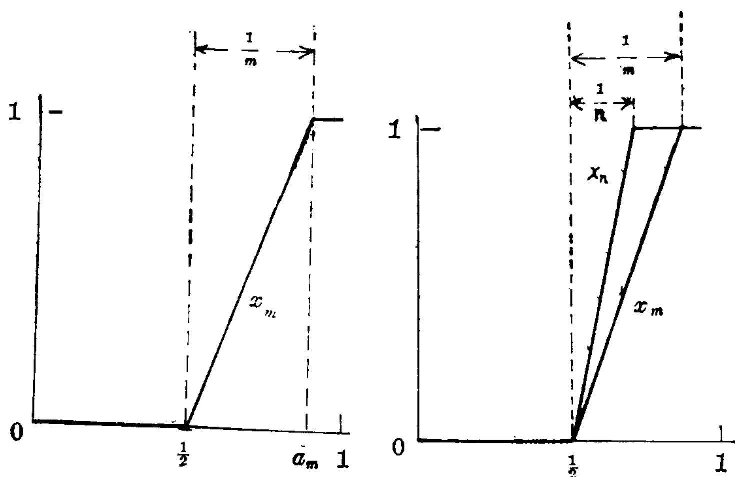



图2-3　例5.9图示

因为它代表图中三角形的面积，所以$\{x_m(t)\}$是Cauchy序列。下证在$C[0,\ 1]$中它不收敛。假设存在着$x(t)\in C[0,\ 1]$，使得$x_m\to x$ $(m\to\infty)$，则

$$\tilde{d}(x_m,\ x)=\int_0^1 |x_m(t)-x(t)|dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|dt+\int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |x_m(t)-x(t)|dt+$$

$$\int_{a_m}^1 |1-x(t)|dt$$

$$\longrightarrow 0 \qquad (m\to\infty)$$

但上式右端各项非负，其和的极限为零，必须各项极限为零。由

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|dt = 0，\text{得出} x(t) = 0 \quad t \in [0, \frac{1}{2})；$$

当$m\to\infty$时，$a_m\to\frac{1}{2}$，故第二个积分趋于零；再由第三个积分趋于 0，必有

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - x(t)|\, dt = 0 \quad \text{推得} \quad x(t) = 1 \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]$$

从而，得出

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

此函数在区间$[0, 1]$上不连续，故$x(t) \notin C[0, 1]$，这与前面假设矛盾。因此，空间 $(C[0, 1], \tilde{d})$ 不是完备的。

## 习　　题

1．设$M\subset l^\infty$是至多有有限多个非零分量的序列 $x=(\xi_i)$构成的子空间，在$M$中作一个Cauchy序列，使之在$M$中不收敛，因而$M$不完备。

2．证明：整数集$X$上定义度量$d(m, n) = |m-n|$，则$(X, d)$是一个完备度量空间．

3．令$X$是正整数集，而$d(m, n) = |m^{-1}-n^{-1}|$，证明 $(X, d)$不完备。

4．证明：在空间$s$中(参看2.5)，我们有$x_n\to x$ 当且仅当对于一切的$i=1, 2, \cdots$，都有$\xi_i^{(n)}\to\xi_i$，其中$x_n=(\xi_i^{(n)})$，$x=(\xi_i)$．

5．证明：在5.9中可代之以下述序列：$x_n(t)=n$，若$0\leqslant t\leqslant 1/n^2$；$x_n(t)=1/\sqrt{t}$，若$1/n^2\leqslant t\leqslant 1$．

6. 令$X$是全体实数列$x=(\xi_i)$作成的度量空间，其中每一个元只有有限多个非零分量，$d(x, y)=\Sigma|\xi_i-\eta_i|$，这里$y=(\eta_i)$。证明$\{x_m\}\in X$，$x_m=(\xi_i^{(m)})$是Cauchy序列，但不收敛。其中$\xi_i^{(m)}=i^{-2}$，若$i=1, 2, \cdots, m$；但$\xi_i^{(m)}=0$，若$i>m$。

7. 证明：令$Y\subset C[a, b]$是$C[a, b]$中合于条件$x(a)=x(b)$的$x(t)$的全体作成的子空间，则$Y$是完备的。

8. 证明离散度量空间是完备的。

9. 用$C^1[0, 1]$表示在区间$[0, 1]$上有一阶连续导数的实函数全体，引入度量

$$d(x,y)=\max_{0\leq t\leq 1}\{|x(t)-y(t)|, |x'(t)-y'(t)|\},$$

证明$C^1[0, 1]$是完备度量空间。

## §6 度量空间的完备化

有理数直线$Z$是不完备的，但是可以将其扩充成实数直线$R$是完备的，并且，这种延拓使得$Z$在$R$中稠。一个极其重要的事实是：任何不完备的度量空间，均可使用类似的方法使其完备化。

**6.1 定义** 假设$X=(X,d)$和$\widetilde{X}=(\widetilde{X}, \widetilde{d})$都是度量空间，则

（Ⅰ）从$X$到$\widetilde{X}$里的映射$T$称为是**等距**的，如果$T$保持距离不变。亦即，对于一切$x, y\in X$有

$$\widetilde{d}(Tx, Ty)=d(x, y)$$

其中$Tx$，$Ty$分别是$x$，$y$的象。

（Ⅱ）空间$X$称为与空间$\widetilde{X}$**等距**，如果存在一个$X$到$\widetilde{X}$上的双等距映射。此时，$X$和$\widetilde{X}$称为**等距空间**。

注意：在两个等距度量空间中，它们的点的属性可能有很大的区别。例如有的可能是序列，而有的则可能是函数。但是，从度量的角度来看待这两个空间，却可以把它们看作是完全相等的，这是因为在研究工作中，空间的结构总是主要的，而点的属性却处于次要地位。

现在来讨论度量空间完备化的问题。粗略说来，一个空间$X$不完备，是因为$X$中的一些Cauchy 序列不收敛，所以，我们的任务是分派合适的极限给这些不收敛的 Cauchy序列。但是，我们不希望增加“太多的极限元”，因此，首先要把这些Cauchy序列进行分类，这是可以办到的。其实，这正是有理直线完备化过程给予我们的启示。

**6.2 定理** 对于度量空间$X=(X, d)$，总存在完备度量空间$\hat{X}=(\hat{X}, \hat{d})$，使得其子空间$W\subset\hat{X}$与$X$等距且在$\hat{X}$中稠。在等距意义下，空间$\hat{X}$是唯一的。亦即，如果$\tilde{X}$是任意完备度量空间，其稠子空间$\tilde{W}$与$X$等距，则$\tilde{X}$与$\hat{X}$是等距空间。

**证** 证明分成四步：

（Ⅰ）构造度量空间$\hat{X}=(\hat{X}, \hat{d})$。

（Ⅱ）作一个从$X$到$W$上的等距映射$T$，这里$\overline{W}=\hat{X}$。

（Ⅲ）证明$\hat{X}$完备。

（Ⅳ）在等距意义下，$\hat{X}$的唯一性。

现在来证明这个定理。

（Ⅰ）设$\{x_n\}$和$\{x_n'\}$都是$X$中的Cauchy序列，定义$\{x_n\}$等价于$\{x_n'\}$，记为$\{x_n\}\sim\{x_n'\}$，如果

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n') = 0 \tag{1}$$

令$\hat{X}$是按上述定义得到的全体Cauchy等价类$\hat{x}$，$\hat{y}$，…作成的集合。记$\{x_n\}\in\hat{x}$，即$\{x_n\}$是$\hat{x}$的元。定义

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \tag{2}$$

其中$\{y_n\}\in\hat{y}$。下面来证明（2）中的极限存在。因为

$$d(x_n, y_n)\leqslant d(x_n, x_m)+d(x_m, y_m)+d(y_m, y_n)$$

在上不等式中互换$m$和$n$，又将两个不等式合起来，得到

$$|d(x_n, y_n)-d(x_m, y_m)|\leqslant d(x_n, x_m)+d(y_m, y_n) \tag{3}$$

由于$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是Cauchy序列，故当$n,m$充分大时（3）式右端可以充分小，这说明$\{d(x_n, y_n)\}$是实直线$R$中的Cauchy序列，由$R$的完备性，蕴含着(2)式右端的极限存在。

我们还必须证明(2)中的极限与等价类的代表的选择无关。实际上，如果$\{x_n\}\sim\{x_n'\}$，并且$\{y_n\}\sim\{y_n'\}$，则由(1)式，当$n\to\infty$时

$$|d(x_n, y_n)-d(x_n', y_n')|\leqslant d(x_n, x_n')+d(y_n, y_n') \to 0$$

这就推得我们期望的结论：

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)=\lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n')$$

现在来证明(2)式中定义的$\hat{d}$是$\hat{X}$上的度量。显然($M1$)，($M3$)成立。同时

$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y})=0$，得到$\{x_n\}\sim\{y_n\}$，蕴含$\hat{x}=\hat{y}$。给出($M2$)。又由不等式

$$d(x_n, y_n)\leqslant d(x_n, z_n)+d(z_n, y_n)$$

其中$\{z_n\}\in\hat{z}$。令$n\to\infty$，由(2)式得到(M4)。

（Ⅱ） 与$b\in X$对应包含常驻Cauchy序列$(b, b,\cdots)$的类记为$\hat{b}\in\hat{X}$，作映射$T$：$X\to W$，即$\hat{b}=Tb$，则$W=T(X)\subset\hat{X}$。由(2)式知$T$是等距映射，因为

$$\hat{d}(\hat{b}, \hat{c})=d(b, c)$$

这里$\hat{c}$是$\{y_n\}$的类，而$y_n\equiv c$，由于任何等距映射都是单射，而且$T$：$X\to W$是满射，所以$W$与$X$是等距的。

现证$W$在$\hat{X}$中稠。考虑任意的$\hat{x}\in\hat{X}$，令$\{x_n\}\in\hat{x}$，对于任给的$\varepsilon>0$，存在着$N$，使得

$$d(x_n, x_N)<\varepsilon/2 \qquad (n>N)$$

假设$(x_N, x_N,\cdots)\in\hat{x}_N$，则$\hat{x}_N\in W$，由(2)式，

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_N)=\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_N)\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon$$

这说明任意$\hat{x}\in\hat{X}$的每一个$\varepsilon$-邻域中都包含$W$的元，因此，$W$在$\hat{X}$中稠。

（Ⅲ） 证$\hat{X}$的完备性。令$\{\hat{x}_n\}$是$\hat{x}$中的任意Cauchy序列，因为$W$在$\hat{X}$中稠，所以，对于每一个$\hat{x}_n$，必有$\hat{z}_n\in W$，使得

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n)<\frac{1}{n} \tag{4}$$

由三角不等式，我们有

$$\hat{d}(\hat{z}_m, \hat{z}_n)\leqslant\hat{d}(\hat{z}_m, \hat{x}_m)+\hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n)+\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n)$$

$$\leqslant \frac{1}{m} + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \frac{1}{n}$$

但是，$\{\hat{x}_n\}$是Cauchy序列，对于充分大的$m$和$n$，$\hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n)$必小于任给的$\varepsilon>0$，因此$\{\hat{z}_m\}$也是Cauchy序列。由(Ⅱ)知，$T$：$X\to W$是等距映射，并且$\hat{z}_m\in W$，则序列$\{z_m\}$也是$X$中的Cauchy序列，其中$z_m = T^{-1}\hat{z}_m$ 今设$\hat{x}\in\hat{X}$是序列$\{z_m\}$所属的类，现证$\hat{x}$是$\{\hat{x}_n\}$的极限。根据(4)式，

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) \leqslant \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}) < \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}) \tag{5}$$

由于$\{z_m\}\in\hat{x}$，且$\hat{z}_n\in W$，于是$(z_n, z_n, \cdots)\in\hat{z}_n$，不等式(5)化成

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} d(z_n, z_m)$$

显然，当$n$充分大时，上式右端可以小于任意给定的$\varepsilon>0$，于是$\hat{X}$中的Cauchy序列$\{\hat{x}_n\}$都有极限$\hat{x}\in\hat{X}$，因而$\hat{X}$完备。

(Ⅳ) 证$\hat{X}$的唯一性。如果$(\tilde{X}, \tilde{d})$是另外一个完备度量空间，其稠子空间$\tilde{W}$与$X$等距，则对于任意$\tilde{x}$，$\tilde{y}\in\tilde{X}$，在$\tilde{W}$中有序列$\{\tilde{x}_n\}$，$\{\tilde{y}_n\}$，使得$\tilde{x}_n\longrightarrow\tilde{x}$，$\tilde{y}_n\longrightarrow\tilde{y}$，因此

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty}\tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$$

这是因为

$$|\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - \widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n)| \leqslant \widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{x}_n) + \widetilde{d}(\widetilde{y}, \widetilde{y}_n) \longrightarrow 0$$

（此不等式由与（3）式相同的方法推得）由于$\widetilde{W}$与$W \subset \hat{X}$等距且$\overline{W} = \hat{X}$，所以在$\widetilde{X}$和$\hat{X}$上必有相同的距离，因此$\widetilde{X}$与$\hat{X}$是等距空间。

在后面的两章中，将看到这个定理的一些基本应用。

## 习　题

1. 证明：如果度量空间$X$的子空间$Y$仅含有有限多个点，则$Y$是完备的。

2. 离散度量空间$X$的完备化空间是什么？

3. 如果$(X, d)$完备，证明$(X, \tilde{d})$亦是完备的，其中$\tilde{d} = d/(1+d)$。

4. 证明(1)式决定了在$X$中所有Cauchy序列之间的一个等价关系。

5. 如果序列$\{x_n\}$和$\{x_n'\}$在$(X, d)$中，使得(1)式成立，且$x_n \longrightarrow l$，证明$\{x_n'\}$收敛且以$l$为其极限。

6. 集$X$上的一个有限伪度量是函数$d: X \times X \longrightarrow R$，满足$(M1)$，$(M3)$，$(M4)$，并且有

$$(M2^*) \qquad\qquad d(x, x) = 0$$

伪度量与度量有何不同？证明$d(x, y) = |\xi_1 - \eta_1|$是$R^2$中的一个伪度量，其中$x = (\xi_1, \xi_2)$，$y = (\eta_1, \eta_2)$。

7. 试作具有度量$d(x, y) = |\mathrm{arctg}x - \mathrm{arctg}y|$的集$R$的完备化空间。

8. 作出具有度量$d(n, m) = |e^{in} - e^{im}|$的整数集的完备化空间。

## §7 不动点原理

在代数方程、微分方程以及积分方程的求解问题中，通常要把所求的解归结为度量空间中映射的不动点，并且用逐次逼近的方法来计算出不动点，这是方程论中的一个十分重要的方法。这个方法可以追溯到牛顿求解代数方程所用的切线法。法国数学家H.Poincarè于1895～1900年间，在代数拓扑学中首先使用不动点概念。1910年，L.E.J.Brouwer证明了有限维空间中多面体上的连续映射至少有一个不动点。1922年，G.D.Birkhoff，Kellogg作出一些改进和应用，而波兰数学家Banach更一般地处理了这个问题。半个世纪以来，人们从事不动点定理的研究仍旧经久不衰，取得了极为重要的成果。

**7.1 定义** 假设$X$是度量空间，称点$x\in X$为映射$T: X\longrightarrow X$的**不动点**，如果有$x=Tx$。

**7.2 定义** 设$X=(X, d)$是度量空间，映射$A: X\longrightarrow X$，如果存在实数$\alpha$，$0\leqslant\alpha<1$，使得对于一切$x$，$y\in X$，成立着

$$d(Ax, Ay)\leqslant\alpha d(x, y) \tag{1}$$

则称$A$是$X$上的一个**压缩映射**。

显然，等距映射不是压缩映射。但是，压缩映射必为连续映射，反之不然。

**7.3 定理：**(Banach)在完备度量空间中，压缩映射必有唯一的不动点。

**证** 假设$X=(X, d)$是完备度量空间，$A: X\rightarrow X$是压缩映射。

（Ⅰ） $A$有不动点。任取$x_0 \in X$，命$x_1 = Ax_0$，$x_2 = Ax_1 = A(Ax_0) = A^2x_0, \cdots, x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0 (n = 1, 2, \cdots)$，如此得到X中的点列$\{x_n\}$。下证$\{x_n\}$是X中的Cauchy序列。因为$A$是压缩映射

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Ax_n, Ax_{n-1}) \leqslant \alpha d(x_n, x_{n-1}) \quad (n \geqslant 1)$$

$$d(x_n, x_{n-1}) = d(Ax_{n-1}, Ax_{n-2}) \leqslant \alpha d(x_{n-1}, x_{n-2})$$

所以 $$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2})$$

如此下去，得到

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha^n d(x_1, x_0) \qquad (n \geqslant 1)$$

令$m = n + p$，$p$为自然数，对于充分大的$n$，由广义三角不等式，推得

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= d(x_{n+p}, x_n) \\ &\leqslant d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + \\ &\qquad d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leqslant (\alpha^{n+p-1} + \alpha^{n+p-2} + \cdots + \alpha^n) d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^n - \alpha^{n-p}}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \\ &< \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \end{aligned} \tag{2}$$

对于任给的$\varepsilon > 0$，只要$n$充分大，则

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) < \varepsilon \qquad (0 \leqslant \alpha < 1)$$

是显然的。因此，$\{x_n\}$是X中的Cauchy序列，但因$X$是完备的，必有一点$x^* \in X$，使得$x_n \longrightarrow x^*$，又因为压缩映射必为连续映射，于是$Ax_n \longrightarrow Ax^*$。另一方面，$Ax_n = x_{n+1} \longrightarrow x^*$，并且收敛点列$\{Ax_n\}$的极限唯一，所以$Ax^* = x^*$。由定义7.1，$x^*$是$A$的不动点。

（Ⅱ）不动点 $x^* \in X$是唯一的。假设此结论不真，即$A$还有不动点$\tilde{x}$，则 $A\tilde{x} = \tilde{x}$，于是

$$d(x^*, \tilde{x}) = d(Ax^*, A\tilde{x}) \leqslant \alpha d(x^*, \tilde{x})$$

但$0 \leqslant \alpha < 1$，上式成立必有$d(x^*, \tilde{x}) = 0$，因此有$x^* = \tilde{x}$。

从证明中可以看出：度量空间$X$的完备性保证了不动点$x^*$的存在，而映射的压缩性则保证了不动点的唯一。

值得注意的是：（1°）定理 7.3 只给出了不动点存在唯一的一个充分条件，但条件不是必要的，即存在着有不动点的映射但非压缩映射。例如：$F(x) = 2x + 1$，$F: x \longmapsto 2x + 1$，$x \in (-\infty, +\infty)$有唯一的不动点$x = -1$，但$F$不是压缩映射。

（2°）空间$X$完备的条件不可少，否则不能保证压缩映射有不动点。例如：令$X = (0, 1/4)$，$F: X \longrightarrow X$，$F(x) = x_2$，因为对于任意的$x$，$y \in X$，$d(F(x), F(y)) = |F(x) -$

$$F(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y|\ |x - y| \leqslant (|x| + |y|)\ |x - y| <$$

$$\frac{1}{2}|x - y| = \frac{1}{2}d(x, y)$$

故$F$是压缩映射，但$F$无不动点。

作为定理7.3应用的例子，我们研究微分方程、积分方程解的存在与唯一性。

**7.4　例（微分方程）**：考虑微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

其中$f(x, y)$在全平面连续，并且关于$y$满足Lipschitz条件：

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)| \leqslant L|y_1-y_2|$$

($L$为定常数)，则过点$(x_0, y_0)$微分方程 (3)有一条且只有一条积分曲线。

**证** 问题(3)等价于解下述积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

取$\delta>0$，使得$L\delta<1$，用$C[x_0-\delta, x_0+\delta]$表示区间$[x_0-\delta, x_0+\delta]$上全体连续函数作成的空间。定义映射

$$T: C[x_0-\delta, x_0+\delta] \longrightarrow C[x_0-\delta, x_0+\delta]$$

或 $T$: $\quad y(x) \longmapsto y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt$

则 $Ty(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ 在区间$[x_0-\delta, x_0+\delta]$上连续，所以

$$d(Ty_1, Ty_2)=\max_{|x-x_0|\leqslant\delta}\left|[y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)dt]\right.$$

$$\left.-[y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt]\right|$$

$$\leqslant \max_{|x-x_0|\leqslant\delta}\int_{x_0}^{x}|f(t, y_1(t))-f(t, y_2(t))|dt$$

$$\leqslant \max_{|x-x_0|\leqslant\delta}\int_{x_0}^{x} L|y_1(t)-y_2(t)|dt$$

$$\leqslant L\delta \max_{|x-x_0|\leqslant\delta}|y_1(t)-y_2(t)|$$

$$=L\delta\, d(y_1, y_2)$$

因为$L\delta<1$，故$T$是压缩映射，又空间$C[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$(在一致度量下）是完备的，由定理7.3，必有$y^*(x)$使得

$$y^*(x)=Ty^*(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\ y^*(t))dt$$

于是$y^*(x)$是方程(3)经过点$(x_0,\ y_0)$的唯一的一条积分曲线。

**7.5 例（Fredholm 积分方程）**：假设$f(s)$是$[a,\ b]$区间上的已知连续函数，核$K(s,t)$为正方形$a\leqslant s\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant b$上已知连续函数，存在常数$M>0$，使得

$$\int_a^b |K(s,\ t)|dt\leqslant M<+\infty$$

则当$|\lambda|<1/M$时，必有唯一的$\varphi(s)\in C[a,\ b]$，满足Fredholm 积分方程

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)dt \tag{4}$$

**证** 定义映射$T$：$C[a,\ b]\longrightarrow C[a,\ b]$，

亦即$T$：$\varphi(s)\longmapsto f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)dt$，记$\alpha=M|\lambda|$，

则$\alpha<1$，对于任意的$\varphi_1$，$\varphi_2\in C[a,\ b]$，有

$$d(T\varphi_1,\ T\varphi_2)=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\left[f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi_1(t)dt\right]-\left[f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi_2(t)dt\right]\right|$$

$$\leqslant|\lambda|\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)||\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|dt$$

$$\leqslant|\lambda|M\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)\right|$$

$$=\alpha d(\varphi_1,\ \varphi_2)$$

因此$T$是$C[a,\ b]$中的压缩映射，再由$C[a,\ b]$的完备性，必有唯一解$\varphi^*(s)$，满足方程(4)。

实用中，定理7.3中的条件还可以放宽一些。

**7.6 推论** 假设度量空间$X=(X,\ d)$是完备的，$B$：$X\longrightarrow X$是一已知映射，若存在正整数$n$，使得$B^n$：$X\longrightarrow X$是压缩映射，则映射$B$在$X$中有唯一的不动点。

**证** 令$A=B^n$，由假设，$A$是$X$上的压缩映射，又空间$X$完备，由定理7.3，必有不动点$x^*$，使得$x^*=Ax^*$。下面来证明$x^*$亦是映射$B$的不动点。

因为 $AB=B^n\cdot B=B^{n+1}=B\cdot B^n=BA$，于是$A(Bx^*)=B(Ax^*)=Bx^*$，说明$Bx^*$也是$A$的不动点，但由定理7.3，压缩映射$A$的不动点是唯一的，必有$x^*=Bx^*$，因此$x^*$是$B$的不动点。

现在来证明$x^*$是映射$B$唯一的不动点。假设$\tilde{x}$也是$B$的不动点，则有$\tilde{x}=B\tilde{x}$，于是，$B^n\tilde{x}=B^{n-1}(B\tilde{x})=B^{n-1}\tilde{x}=\cdots=B\tilde{x}=\tilde{x}$，所以$\tilde{x}$也是$A=B^n$的不动点，但是$A$只有唯一的不动点，于是$\tilde{x}=x^*$。

作为推论7.6的应用，我们来研究U.Volterra积分方程解的存在与唯一性问题。

**7.7 例** 设$K(s,t)$是定义在三角形区域$a\leqslant s\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant s$上的连续函数，则Volterra积分方程

$$x(s)=f(s)+\lambda\int_a^s K(s,t)x(t)dt \tag{5}$$

对于任意已知函数$f(s)\in C[a, b]$和任意常数$\lambda$，存在唯一解$x^*(s)\in C[a, b]$。

**证** 作映射$T$：$C[a, b]\longrightarrow C[a, b]$，亦即

$$T: \quad x(s)\longmapsto f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)dt$$

则对于任意的$x_1(s)$，$x_2(s)\in C[a, b]$，有

$$\left|Tx_1(s)-Tx_2(s)\right|=\left|\lambda\int_a^s K(s,t)\left[x_1(t)-x_2(t)\right]dt\right|$$

$$\leqslant|\lambda|M(s-a)\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|x_1(s)-x_2(s)\right|$$

$$=|\lambda|M(s-a)d(x_1, x_2) \qquad (6)$$

其中 $$M=\max_{\substack{a\leqslant s\leqslant b\\ a\leqslant t\leqslant b}}\left|K(s,t)\right|$$

用数学归纳法可以证明

$$\left|T^n x_1(s)-T^n x_2(s)\right|\leqslant\frac{|\lambda|^n M^n(s-a)^n}{n!}d(x_1, x_2) \qquad (7)$$

当$n=1$时，已证，即(6)式。假设$n=k$时，有

$$\left|T^k x_1(s)-T^k x_2(s)\right|\leqslant\frac{|\lambda|^k M^k(s-a)^k}{k!}d(x_1, x_2)$$

当$n=k+1$时

$$\left|T^{k+1}x_1(s)-T^{k+1}x_2(s)\right|=|\lambda|\left|\int_a^s K(s,t)\left[T^k x_1(t)-T^k x_2(t)\right]dt\right|$$

$$\leqslant \frac{|\lambda|^{k+1}M^{k+1}}{k!}\left|\int_a^s (t-a)^k dt\right| d(x_1, x_2)$$

$$= \frac{|\lambda|^{k+1}M^{k+1}(s-a)^{k+1}}{(k+1)!} d(x_1, x_2)$$

所以，(7)式对于一切自然数$n$成立，于是

$$d(T^n x_1, T^n x_2) = \max_{a \leqslant s \leqslant b} \left| T^n x_1(s) - T^n x_2(s) \right|$$

$$\leqslant \frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} d(x_1, x_2)$$

因此，对于任何常数$\lambda$，总有充分大的$n$，使得

$$\alpha = \frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1$$

这说明$T^n$是$C[a, b]$中的压缩映射，由推论7.6，方程（5）存在唯一解$x^*(s) \in C[a, b]$。

## 习 题

1. 假设$f$是区间$[a, b]$上的实值、具有二阶连续导数的函数，又$\tilde{x}$是$f$在$(a, b)$内的零点，证明由下定义的

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

是$\tilde{x}$某邻域内的压缩映射。

2. 令$X = \{x \in R \mid x \geqslant 1\} \subset R$，$T$：$X \to X$定义成$Tx = x/2 + 1/x$，证明$T$是压缩映射，并且找出最小的$\alpha$。

3. 若$f$由$f(x, y) = |y|^{1/2}$决定，则它满足Lipschitz条件吗？

4. 用迭代法解积分方程

$$x(s)=v(s)+\mu\int_0^1 e^{s-t}x(t)dt \qquad (|\mu|<1)$$

5． 设函数$K(x, s)$为

$$K(x, s)=\begin{cases} x & (0\leqslant x\leqslant s) \\ s & (s\leqslant x\leqslant 1) \end{cases}$$

求出方程 $\varphi(x)-\frac{1}{10}\int_0^1 K(x, s)\varphi(s)ds=1$ 的近似连续函数解，其误差不超过$10^{-4}$。

6． 设$T$为完备度量空间$X$到$X$的映射，如果

$$\alpha=\inf_{n}\sup_{x\neq y}\frac{d(T^n x, T^n y)}{d(x, y)}<1$$

则$T$存在唯一的不动点。

# 第三章　赋范空间、Banach空间

特别重要而且有用的度量空间是一个线性空间并在其上引入范数而作成的赋范空间，如果它还是完备的，则称为Banach空间。赋范空间，特别是Banach空间以及定义在其上的线性算子理论是泛函分析理论的精华部份，并且有着重要的应用。

赋范空间的一般定义是在1920～1922年间，分别由S. Banach、H. Hahn、E. Helly、N. Wiener先后独立引入的，在1920～1930年间，赋范空间的研究构成了当时泛函分析的主要内容，这一时期的主要工作总结在1932年出版的Banach的专著«Thèorie des opérations linèaires»中。

## §1　线性空间

**1.1　定义**　假设$X$是一个非空集合，在$X$中规定了**线性运算**——元素的加法运算和标量（实数或复数）与$X$中元素的乘法，满足下述条件：

（Ⅰ）$X$关于加法作成一个Abel（可交换）群。即对于任意$x$，$y$，$z \in X$，存在着$u \in X$，使得$u = x + y$，称为$x$与$y$的和，适合

（1°）　交换律：$y + x = x + y$；

（2°）　结合律：$(x + y) + z = x + (y + z)$；

（3°）　$X$中有唯一的零元$\theta$，对于任意的$x \in X$都有$x + \theta = \theta + x = x$；

(4°) 对于任意的$x\in X$,存在着唯一的元素$x'\in X$,使得$x+x'=x'+x=\theta$，则称$x'$为元$x$的负元，记为$-x$。

(Ⅱ) 对于任意的元$x\in X$和任意标量（实数或复数）$\alpha$，$\beta\in K(R$或$C)$，使得$\alpha x\in X$，则称$\alpha x$为标量$\alpha$与元$x$的标量积，满足

(5°) $1\cdot x=x\cdot 1=x$；

(6°) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

(7°) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$，$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$。

则称$X$为标量域$K$上的**线性空间**或**向量空间**，也称$X$的元为**向量**。若标量积取自$R$上，则称$X$为**实线性空间**；若标量积取自C上,则称$X$为**复线性空间**。

注意：一般在不致引起混淆时，以后我们不加以区别数0与零向量$\theta$，统统用0表示。否则，我们必须用$\theta$表示零向量。

**1.2 空间$R^n$** 对于任意的$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \eta_2\cdots, \eta_n)$，定义两种代数运算为

$$x+y=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots, \xi_n+\eta_n)$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots, \alpha\xi_n) \qquad (\alpha\in R)$$

容易验证它们满足定义1.1中的(1°)～(7°)，所以欧氏空间$R^n$是一个实线性空间。

**1.3 空间$C^n$** 对于任意的$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots\xi_n)$,$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots\eta_n)$，以及任意标量$\alpha\in C$，定义两种代数运算为

$$x+y=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots, \xi_n+\eta_n),$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots\alpha\xi_n),$$

易知，酉空间$C^n$是一个复线性空间。

**1.4 空间$C[a, b]$**是一个线性空间，其上的线性运算如下定义：

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t);$$
$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t);$$
其中$x(t)$，$y(t)\in C[a,\ b]$，$\alpha\in K$。

**1.5 空间$l^2$**对于任意的$x=(\xi_i)\in l^2$，$y=(\eta_i)\in l^2$，定义其线性运算为
$$x+y=(\xi_i+\eta_i)=(\xi_1+\eta_1,\ \xi_2+\eta_2,\ \cdots)$$
$$\alpha x=(\alpha\xi_i)=(\alpha\xi_1,\ \alpha\xi_2,\ \cdots)$$
其中$\alpha\in K$是任意标量。因为由$p=2$的Minkowski不等式，有
$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$<+\infty$$
得到$x+y\in l^2$，而$\alpha x\in l^2$显然，所以，前面定义的线性运算是合理的。容易检验定义1.1中(1°)～(7°)成立，因此，$l^2$是一个线性空间。

其元是序列的其它线性空间还有$l^\infty$，$l^p$，其中$1\leqslant p<+\infty$，以及$s$。

如果$X$是数域$K$上的线性空间，$Y\neq\phi$是$X$的子集，使得对于一切$y_1$，$y_2\in Y$以及任意标量$\alpha$，$\beta\in K$，总有$\alpha y_1+\beta y_2\in Y$，则$Y$成为一个线性空间，称为$X$的**子空间**。这里，$Y$中的两个线性运算与$X$中的相同。

显然$X$和$Y=\{\theta\}\subset X$都是$X$的子空间，称为$X$的**平凡子空间**。线性空间$X$除了平凡子空间以外的子空间称为$X$的**真子空间**。

例如：$R^3$是一个实线性空间，其上的两种线性运算为：对于$x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ $y=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$，
$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\ \xi_2+\eta_2,\ \xi_3+\eta_3)$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\ \alpha\xi_2,\ \alpha\xi_3)$$

其中，$\alpha\in R$。令$Y$是形如$z=(\xi_1,\ 0,0)$全体元作成的集合，在上述运算下，构成$R^3$的一个真子空间。

假设$Y_1$，$Y_2$都是线性空间$X$的线性子空间，则$Y_1\cap Y_2$仍是$X$的线性子空间。一般地，如果$Y_i\subset X(i=1,\ 2,\ \cdots)$都是$X$的线性子空间，则$Z=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}Y_i$也是$X$的线性子空间。反之，$Y_1\cup Y_2$则未必是$X$的线性子空间。读者自证。

如果$X$是线性空间，$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_m\in X$，对于$\alpha_1$，$\cdots$，$\alpha_m\in K$（$X$的标量域），则称$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_mx_m$为向量组$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_m$的**线性组合**。

如果任意非空子集$M\subset X$，则$M$的向量的一切有限线性组合作成的集叫作$M$的**生成集**，记为$\mathrm{Span}M=Y$。显然$Y\subsetneq X$必是$X$的一个子空间，称为**由$M$生成的子空间**。

例如：设$X=R^3$，$e_1=(1,\ 0,\ 0)$，$e_2=(0,\ 1,\ 0)$则$\mathrm{span}\{e_1,\ e_2\}=R^2$。

**1.6　定义**　在线性空间$X$中，由$r(r\geqslant1)$个向量$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_r$作成的集合$A$，如果关系式

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_rx_r=0 \tag{1}$$

成立时（其中$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots$，$\alpha_r$是标量），唯有$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$，则称集$A$是**线性无关**的。否则称$A$是**线性相关**的。此时，存在着不全为零的$r$个标量使得（1）式成立。

$X$的任意子集$A$叫作是**线性无关**的，如果$A$的每一个非空有限子集都是线性无关的。如果$A$不是线性无关的，则称其是**线性相关**的。

由定义1.6，容易推出这样一个事实：如果$A=\{x_1,\ \cdots,\ x_r\}$是线性相关的，则至少有$A$中的一个向量可以表示成其它

向量的线性组合。例如：如果（1）式成立，且$\alpha_r \neq 0$，则$A$线性相关，并且有

$$x_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r}x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_r}x_2 - \cdots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r}x_{r-1}$$

利用线性无关和线性相关的概念，可以确定线性空间的维数。

**1.7 定义** 线性空间$X$称为是**有限维**的，如果存在着正整数$n$，使得$X$包含$n$个向量的线性无关集，而$X$中任意$n+1$个或更多的向量的集都是线性相关的，数$n$叫做空间$X$的**维数**，记为$n=\dim X$。由定义，$X=\{\theta\}$是有限维空间，并规定$\dim X=0$。如果$X$不是有限维空间，则称$X$为**无限维线性空间**。

在泛函分析中，我们对无限维线性空间比对有限维线性空间更感兴趣。例如：$C[a, b]$，$l^2$，$l^\infty$，$B[a, b]$等都是无限维线性空间，而$R^n$和$C^n$都是$n$维线性空间。

如果$X$是$n$维线性空间，则$X$中的线性无关的$n$个向量的集称为$X$的一组**基**，并且空间$X$中的每个向量$x$都可以经由基向量唯一的线性表示：

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

例如：空间$R^n$有一组基是

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \cdots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \cdots, 0) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= (0, 0, \cdots, 1) \end{aligned} \tag{2}$$

有时，称它为$R^n$的**规范基**。

一般说来，如果$X$是一个线性空间，不必是有限维的，

$\phi \neq B \subset X$，是$X$中一个线性无关子集，并且$X$由它生成，则称$B$为线性空间$X$的一组Hamel基。这就是说，对于任意的$x \in X$，必有正整数$r$，和$x_1$，$x_2$，…，$x_r \in B$，$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_r \in K$，使得

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r$$

Hamel基是有限维线性空间中基的推广，如果X是有限维空间，则Hamel基即通常的基。但是，在无限维空间中，Hamel基不是通常意义下的基。

**1.8 命题：任何线性空间$X \neq \{\theta\}$都有基。**

此命题在有限线性空间中是显然。而对于无限维空间，存在性的证明必须使用Zorn引理，有兴趣的读者可以参考其它有关文献，这里证明从略。

**1.9 定理** 假设X是$n$维线性空间，则X的任意真子空间Y的维数必小于$n$。

**证** 如果$n=0$，则$X=\{\theta\}$，它没有真子空间。故可设$n \geqslant 1$，又$Y \subset X$，此时显然有$\dim Y \leqslant \dim X = n$。下证$\dim Y < n$，如若不然，有$\dim Y = n$，于是$X = Y$，矛盾。说明Y中任意线性无关集的向量个数必小于$n$，故$\dim Y < n$。

## 习 题

1. 在$R^3$中指出$A=\{(1, 1, 1), (0, 0, 2)\}$的生成子空间.

2. 证明：$\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$是空间$C[a, b]$中的一个线性无关的集。

3. 证明：使用寻常的加法和乘法，全体实数集形成一维实线性空间，而全体复数集形成一维复线性空间.

4. 如果Y和Z都是线性空间X的子空间，证明$Y \cap Z$也是X的子空间，但$Y \cup Z$不一定是X的子空间，举例说明之。

5. 如果$A\neq\phi$是线性空间$X$的任意子集，证明生成集Span$A$是$X$的线性子空间。

6. 证明：所有$2\times2$方阵形成一个线性空间$X$。确定$\dim X$，找出它的一组基，给出$X$的子空间的例子。所有对称矩阵$x\in X$形成一个子空间吗？所有奇异矩阵呢？

7. 证明二向量空间的Cartan积$X=X_1\times X_2$形成相同域上的线性空间，如果定义二代数运算如下：

$$(x_1,\ x_2)+(y_1,\ y_2)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2)$$

$$\alpha(x_1,\ x_2)=(\alpha x_1,\ \alpha x_2)$$

其中$x_1,\ y_1\in X_1,\ x_2,\ y_2\in X_2$。

8. 令$Y$是线性空间$X$的线性子空间，元$x\in X$关于$Y$的陪集用$x+Y$表示，定义成

$$x+y=\{v|\ v=x+y,\ y\in Y\}$$

证明不同的陪集作成$X$的一个分类．并证明在下述代数运算时

$$(w+Y)+(x+Y)=(w+x)+Y$$

$$\alpha(x+Y)=\alpha x+Y$$

这些陪集作成线性空间的元．此空间称为$X$关于$Y$的商空间，表成$X/Y$。它的维数称为$Y$的余维数，记为codim$Y$，亦即

$$\mathrm{codim}Y=\dim(X/Y)$$

## §2 赋范空间、Banach空间

通过前面的讨论容易看出，在很多情况下，一个线性空间$X$可以同时是度量空间，因为在其上可以引入度量$d$。但是，如果代数结构与度量之间毫无关系的话，我们就不能指望建立起一个有用的，将代数方法与度量概念联系起来的理论。为此，我们在一个线性空间中，首先引入一个新的辅助概念：范数。然后借助于范数得出所期望的度量$d$，这个想

法，导出了赋范空间的概念，结果是赋范空间又为一个极为丰富又十分有趣的理论提供了基础，同时，它又足以包含许多特别重要的具体模型。这就使得它成为泛函分析中最重要的一类空间。

**2.1 定义** 设$X$是域$K$(实的或复的)上的线性空间，如果对于每一个元$x\in X$，都有一个确定的非负实数$\|x\|$与之对应，满足下述条件：

$$
\begin{aligned}
&(N1) \quad \|x\|\geqslant 0;\\
&(N2) \quad \|x\|=0\text{当且仅当}x=0; \qquad (1)\\
&(N3) \quad \|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\| \qquad (\alpha\in K);\\
&(N4) \quad \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\| \qquad (\text{三角不等式})(y\in X)
\end{aligned}
$$

则称$X$为**赋范线性空间**，简称为**赋范空间**，记为$(X,\ \|\cdot\|)$或$X$，$\|x\|$称为元$x\in X$的**范数**。

如果$(X,\ \|\cdot\|)$是完备的（指由范数所决定的度量而言），则称$(X,\ \|\cdot\|)$为**Banach空间**。

注意：如果给定赋范空间$(X,\ \|\cdot\|)$，则$X$必是一个度量空间。因为利用范数$\|\cdot\|$容易决定出度量$d$：对于任意的$x,y\in X$，定义

$$d(x,\ y)=\|x-y\|$$

其实范数$\|x\|=\|x-\theta\|=d(x,\ \theta)$即元$x$到零元$\theta$的距离，这正是平面$R^2$和空间$R^3$中向量长度概念的推广。

容易推出一个常用的不等式：

$$\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|\leqslant\|x-y\| \qquad (2)$$

从前面的讨论已经知道：任一赋范空间中的范数都可以决定出一个度量。反过来，任何一个度量都可以从某个范数得到吗？请看以下命题。

**2.2 命题** 设任意的$x$, $y\in X$, $\alpha$, $\beta\in K$, 则度量$d(\cdot, \cdot)$由范数$\|\cdot\|$决定的充要条件是下述关系式成立：

$$d(x, y)=d(x-y, 0), \quad d(\alpha x, 0)=|\alpha|\, d(x, 0) \tag{3}$$

**证** 必要性。定义$d(x, y)=\|x-y\|$, 则$\|x\|=d(x, 0)$, $d(x, y)$满足(3)式。因为$d(x, y)=\|x-y\|=d(x-y, 0)$; $d(\alpha x, 0)=\|\alpha x\|=|\alpha|\ \|x\|=|\alpha| d(x, 0)$。

充分性。若度量$d(x, y)$满足(3)式，则$\|x\|=d(x, 0)$是一个范数，这只需检验范数四公理成立。因为$\|x\|=d(x, 0)\geqslant 0$, $(N1)$成立。又$\|x\|=0$当且仅当$d(x, 0)=0$, 等价于$x=0$,故$(N2)$成立。由于$\|\alpha x\|=d(\alpha x, 0)=|\alpha| d(x, 0)=|\alpha|\ \|x\|$, 其中$\alpha\in K$。所以$(N3)$成立。最后，由$\|x+y\|=d(x+y, 0)=d(x-(-y), 0)=d(x, -y)\leqslant d(x, 0)+d(0, -y)=d(x, 0)+d(-y, 0)=\|x\|+|-1| d(y, 0)=\|x\|+\|y\|$。

显然(3)式也是线性度量空间成为线性赋范空间的充要条件。

**2.3 命题** 赋范空间$(X, \|\cdot\|)$的范数导出的度量，满足下述性质：对于所有的$x$, $y\in X$和固定的$a\in X$, 以及任意的$\alpha\in K$, 有

(Ⅰ) $d(x+a, y+a)=d(x, y)$ (平移不变性) (4)

(Ⅱ) $d(\alpha x, \alpha y)=|\alpha|\ d(x, y)$。

**证** 显然有：

$$d(x+a, y+a)=\|(x+a)-(y+a)\|=\|x-y\|=d(x, y),$$

$$d(\alpha x, \alpha y)=\|\alpha x-\alpha y\|=|\alpha|\ \|x-y\|=|\alpha|\ d(x, y)$$

利用命题2.2和命题2.3，容易举出这样的度量空间，它们不是赋范空间。

**2.4 空间$s$不是赋范空间。** 取$x=(1, 0, 0, \cdots)$, 即除第一个分量以外，其余的分量都是零，显然$x\in s$, 又取$\alpha=2$,

则

$$d(2x,\ 0)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|2\xi_i-0|}{1+|2\xi_i-0|}=\frac{1}{3}$$

但

$$2d(x,\ 0)=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-0|}{1+|\xi_i-0|}=\frac{1}{2}$$

所以

$$d(2x,\ 0)\neq 2d(x,\ 0)$$

由命题2.2知，$s$不是赋范空间。

通过上面的讨论，我们必须对范数与度量的概念和它们之间的关系有一个清晰的认识。当然存在着很多的赋范空间和Banach空间，这里所说的完备性是对于由范数$\|\cdot\|$产生的度量$d(\cdot,\ \cdot)$之下来定义的。

**2.5 欧氏空间$R^n$和酉空间$C^n$**都是Banach空间，其范数定义成，对于任意$x=(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\xi_n)$，

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{1/2}=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2}\quad(5)$$

若$x\in R^n$，则$\xi_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是实数，$|\xi_i|$表绝对值；若$x\in C^n$，则$\xi_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是复数，$|\xi_i|$表复数的模。这时，

$$d(x,\ y)=\|x-y\|=\sqrt{|\xi_1-\eta_1|^2+\cdots+|\xi_n-\eta_n|^2}$$

其中$y=(\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_n)$。特别，当$n=3$时，对于$x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)\in R^3$，则

$$\|x\|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$$

这就是熟知的三维向量的长。

**2.6 空间$l^p$** $(1 \leqslant p < +\infty)$也是Banach空间，其范数为

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} \tag{6}$$

其中$x=(\xi_i)\in l^p$。使用Minkowski不等式立即推得三角不等式$(N4)$。由它导出的度量为

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p}$$

这里，$y=(\xi_i)\in l^p$。

**2.7 空间$l^\infty$**是Banach空间，范数为

$$\|x\| = \sup_i |\xi_i| \tag{7}$$

**2.8 空间$C[a,b]$**是Banach空间，范数为

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \tag{8}$$

**2.9 空间$C[0, 1]$**是赋范空间，但非Banach空间，其范数定义成

$$\| x \| = \int_0^1 |x(t)| dt \tag{9}$$

注意：在区间$[a, b]$上全体连续实值函数作成的空间$X$是一个赋范空间，其范数为

$$\| x \| = \left(\int_a^b [x(t)]^2 dt\right)^{1/2} \tag{10}$$

其中$x(t)\in X$。这个空间是不完备的。利用第一章例5.9，取$[a, b]=[0, 1]$，在由(10)决定的度量下，该序列仍是Cauchy序列，因为，当$n>m$时

$$\| x_n - x_m \|^2 = \int_0^1 \left[ x_n(t) - x_m(t) \right]^2 dt = \frac{(n-m)^2}{3mn^2}$$

$$< \frac{1}{3m} - \frac{1}{3n}$$

但在此度量下，序列$\{x_n\}$不收敛，其证明与例5.9同。显然，对于在区间$[a, b]$上，也可以造出类似的例子来。

另一方面，由第二章定理6.2知，空间X可以完备化，它的完备化空间表示成$L^2[a, b]$，这是一个Banach空间。实际上，X上的范数和线性运算都可以延拓到X的完备化空间上，正如下一节定理3.3所指出的那样。

我们把在闭区间$[a, b]$上$p(p\geqslant 1)$次方可积的实值函数的全体作成的集表成$L^p[a, b]$，则对于任何$x(t)\in L^p[a, b]$，有$\int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty$。

**2.10　引理(Hölder积分不等式)**　设$p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，又$f(t)\in L^p[a, b]$，$g(t)\in L^q[a, b]$，则$f(t)g(t)\in L[a, b]$，并且有

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q} \tag{11}$$

**证**　如果$f(t)$，$g(t)$至少有一个为0，不等式(11)显然成立。因此不妨设$f(t)\neq 0$，$g(t)\neq 0$，

则 $\int_a^b |f(t)|^p dt > 0, \qquad \int_a^b |g(t)|^q dt > 0$

作函数

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{\sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt}} \text{和} \psi(t) = \frac{g(t)}{\sqrt[q]{\int_a^b |g(t)|^q dt}}$$

在第二章引理2.1中，取$A = |\varphi(t)|^p$，$B = |\psi(t)|^q$，代入Young不等式，得到

$$|\varphi(t)\psi(t)| \leq \frac{|\varphi(t)|^p}{p} + \frac{|\psi(t)|^q}{q} \tag{12}$$

因为$|\varphi(t)|^p$，$|\psi(t)|^q \in L[a, b]$，由(12)式，立即推出$\varphi(t)\psi(t) \in L[a, b]$，因而推得$f(t)g(t) \in L[a, b]$。再在(12)式两边积分之，得到

$$\int_a^b |\varphi(t)\psi(t)| dt \leqslant \int_a^b \frac{|\varphi(t)|^p}{p} dt + \int_a^b \frac{|\psi(t)|^q}{q} dt$$

$$= 1$$

从而有

$$\int_b^a |f(t)g(t)| dt \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}$$

注意：Hölder积分不等式(11)，我们是在Riemann积分的意义下给出证明，当然，此不等式在Lebesgue积分下仍成立。

当$p = 2$时，Hölder不等式(11)又称为Буняковский不等式，即

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{1/2} \tag{13}$$

**2.11 引理（Minkowski积分不等式）** 设$p \geqslant 1$，$f(t)$，$g(t) \in L^p[a,\ b]$，则$f(t)+g(t) \in L^p[a,\ b]$，并有

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/p} \tag{14}$$

**证** 当$p=1$时，显然有

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|\,dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt + \int_a^b |g(t)|\,dt$$

不等式(14)成立。不妨设$p>1$，因为$f(t)$，$g(t) \in L^p[a,\ b]$，则$f(t)+g(t) \in L^p[a,\ b]$（证明看2.12），于是

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt < +\infty$$

同时 $\int_a^b |[f(t)+g(+)]^{p/q}|^q dt = \int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt <$

$+\infty$

因此，$[f(t)+g(t)]^{p/q} \in L^q[a,\ b]$，由引理2.10，推得

$$\int_a^b |f(t)||f(t)+g(t)|^{p/q} dt \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^{p/q\cdot q} dt\right)^{1/q}$$

同理，有

$$\int_a^b |g(t)||f(t)+g(t)|^{p/q} dt \leqslant \left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p} \cdot$$

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^{p/q \cdot q} dt\right)^{1/q}$$

所以

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt = \int_a^b |f(t)+g(t)||f(t)+g(t)|^{p/q} dt$$

$$\leqslant \int_a^b |f(t)||f(t)+g(t)|^{p/q} dt + \int_a^b |g(t)||f(t)+g(t)|^{p/q} dt$$

$$\leqslant \left[\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p}\right] \cdot$$

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/q}$$

上不等式两端同除以右端最后一个因子，并注意到$1-1/q=1/p$，最后得到

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} +$$

$$\left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

利用引理2.11，容易得到空间$L^p[a, b]$。

2.12 **空间$L^p[a, b]$** 空间$L^p[a, b]$是Banach空间，其中（$1 \leqslant p < +\infty$），其上的线性运算是：对于任意的$x(t)$，$y(t) \in L^p[a, b]$，以及$a \in R$，

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t);$$
$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t)。 \tag{15}$$
范数定义成
$$\|x\|_p=\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \tag{16}$$
于是，此空间上有度量
$$d(x,\ y)=\|x-y\|_p=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\right)^{1/p} \tag{17}$$
**证** 对于任意实数$A$，$B$，和$p\geqslant 1$，有
$$|A+B|^p\leqslant(|A|+|B|)^p\leqslant[2\max(|A|,\ |B|)]^p$$
$$\leqslant 2^p(|A|^p+|B|^p)$$
于是
$$|x+y|^p\leqslant(|x|+|y|)^p\leqslant 2^p(|x|^p+|y|^p)$$
所以
$$\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\leqslant 2^p\left(\int_a^b |x(t)|^p dt+\right.$$
$$\left.\int_a^b |y(t)|^p dt\right)<+\infty$$
这说明(15)式中定义的加法是封闭的。

另一方面，
$$\int_a^b |\alpha x(t)+\beta y(t)|^p dt\leqslant\int_a^b (|\alpha x(t)|+|\beta y(t)|)^p dt$$
$$\leqslant\int_a^b 2^p|\alpha|^p|x(t)|^p dt+\int_a^b 2^p|\beta|^p|y(t)|^p dt<+\infty$$
所以 $\alpha x(t)+\beta y(t)\in L^p[a,\ b]$，于是，$L^p[a,\ b]$ 是线性空

间。

容易证明(16)式定义的范数满足公理 $(N1)\sim(N4)$，此时，Minkowski不等式(14)可简写成

$$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

证明空间$L^p[a, b]$在度量(17)之下是完备的，要用到一些其它知识，这里从略。

特别，当$p=2$时，$L^2[a, b]$空间是一类极为重要的线性空间，以后我们称它为Hilbert空间。这里，它是作为$C[a, b]$空间在积分度量下的完备化空间引入的。

## 习　题

1. 证明(5)式确定了一个范数。

2. 设$X$是全体有序实数对$x=(\xi_1, \xi_2)$，$y=(\eta_1, \eta_2)\cdots$作成的线性空间，证明$X$的范数可以定义成

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|;$$

$$\|x\|_2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2};$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}.$$

3. 设$d$是线性空间$X\neq\{0\}$上从一范数导出的度量，证明度量$\tilde{d}$定义成$\tilde{d}(x, x)=0, \tilde{d}(x, y)=d(x, y)+1 \quad (x\neq y)$，证明$\tilde{d}$不可以从一范数导出。

4. 证明：线性空间$X\neq\{0\}$中的离散度量不可以从一范数导出。

5. 证明：赋范空间$X$的子集$A$有界当且仅当存在正数$C$，使得对于任何$x\in A$，有$\|x\|\leqslant C$。

6. （凸集）线性空间的子集$A$称为是凸的，如果$x, y\in A$，蕴含

$$B=\{z\in X \mid z=\alpha x+(1-\alpha)y, \ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}\subset A$$

$B$叫作以点$x$和点$y$为边界的闭线段，其它的点子叫作$B$的内点。证明，在赋范空间$X$中，闭单位球$\tilde{B}(0, 1)=\{x\in X \mid \|x\|\leqslant 1\}$是凸集。

7. 假设$f(t)\in L^p[a, b]$，$g(t)\in L^q[a, b]$，这里，$p$和$q$是正数，

合于条件$1/p+1/q=1/r$，证明：

$fg\in L^r[a, b]$，并且$\|fg\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$

8． 令$p$，$q$，$r$是三正数，满足条件$1/p+1/q+1/r=1$，而且$f$，$g$，$h$分别属于$L^p[a, b]$，$L^q[a, b]$和$L^r[a, b]$，证明：

$fgh\in L[a, b]$，$\|fgh\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r$

## §3 赋范空间的性质

由定义，赋范空间$X$的子空间$Y$是$X$的线性子空间，其上的范数即诱导范数，就是说，把空间$X$中的范数限制在$Y$上而得到的。但是，如果$X$是Banach空间，则其子空间可以是赋范空间，但不必是Banach空间。不过，由前一章的讨论，可以得到下述定理。

**3.1 定理** Banach空间$X$的子空间$Y$仍是Banach空间的充要条件是$Y$为$X$的闭集。

因为赋范空间必是度量空间，因此，关于序列收敛以及与收敛性有关的概念都可以由前章推出，只需利用关系$d(x, y)=\|x-y\|$即可。

（Ⅰ）假设$X=(X, \|\cdot\|)$是赋范空间，如果点列$\{x_n\}\in X$收敛，即存在着$x\in X$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$，或简记$x_n\to x$，并且称$x$为序列$\{x_n\}$的**极限**。

显然，如果$x_n\to x$，则由不等式

$$|\|x_n\|-\|x\||\leqslant\|x_n-x\|$$

推得 $\|x_n\|\to\|x\|$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$。

于是，映射$\|\cdot\|: X\to R$，或$\|\cdot\|$：$x\mapsto\|x\|$是关于$x\in X$是

连续的。

又设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都是$X$中的序列，$x$，$y\in X$，若$x_n\to x$，$y_n\to y$，易证$x_n+y_n\to x+y$。

如果还有$\alpha_n\in K$，$\alpha\in K$，$\alpha_n\to\alpha$，则有$\alpha_n x_n\to\alpha x$。读者自证。

这说明线性运算关于赋范空间中的收敛是连续的。

（Ⅱ） 赋范空间$X$中的序列$\{x_n\}$称为是**Cauchy序列**，如果任给$\varepsilon>0$，存在着$N>0$，使得对于所有的$m$，$n>N$，都有

$$\|x_m-x_n\|<\varepsilon \tag{1}$$

（Ⅲ） **无穷级数** 度量空间中虽有点列的收敛性，但点之间无线性运算。但赋范空间既是线性空间又是度量空间，既有点列的收敛性又有向量之间的线性运算，因此，可以象在微积分中那样定义无穷级数了。

设$(X,\ \|\cdot\|)$是给定赋范空间，序列$\{x_n\}\in X$，则其部份和为

$$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{k=1}^{n}x_k \tag{2}$$

如果部份和序列$\{s_n\}$收敛，$s_n\to s$，即$\|s_n-s\|\to 0$（$n\to\infty$）则称无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k=x_1+x_2+\cdots$$

**收敛**，其和为$s$，亦即$s=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$。

如果正项级数$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$收敛，则称级数(2)**绝对收敛**。

但是，在一般赋范空间中，绝对收敛不能保证级数（2）收敛（请看本节习题3）。

**命题：在赋范空间X中，绝对收敛蕴含收敛当且仅当X是完备的。**

（Ⅳ） **Schauder基** 设赋范空间$X$中含有一个可数元列$(e_n)$，具有如下性质：对于任意元$x\in X$，都存在着唯一的标量列$(\alpha_n)$，有

$$\|x-(\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n)\|=\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_ke_k\|\to 0 \quad (n\to\infty) \tag{3}$$

则$(e_n)$称为空间$X$的一组**Schauder基**。

例如：在空间$l^p$中，有一组Schauder基为$(e_n)$，其中

$$e_n=(\delta_{nk})=\begin{cases}1, & n=k;\\ 0, & n\neq k。\end{cases}$$

亦即

$$e_1=(1,\ 0,\ 0,\ \cdots)$$
$$e_2=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots)$$
$$e_3=(0,\ 0,\ 1,\ \cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(0,\ 0,\ 0,\ \cdots 0,\ 1,\ 0,\ \cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

**3.2 定理** 如果赋范空间$X$有一组Schauder基$(e_n)$，则$X$是可分的。

**证** 我们仅对实赋范空间给出证明，在复空间可以作类似处理。不失一般性，假设$\|e_k\|=1$ $(k=1,\ 2\cdots)$。

作集合$E=\{\sum_{k=1}^{n}\rho_ke_k\,|\,n\in N,\ \rho_k\in Z,\ 1\leqslant k\leqslant n\}$这里$N$表自然

数集，Z表有理数集。显然 $E\neq\phi$，$E\subset X$，且 $E$可数，下证$E$在$X$中稠。事实上，对于任意的$x\in X$，则 $x=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e_k$，这里 $a_k\in R$ $(k=1, 2, \cdots)$。对任给的$\varepsilon>0$，存在着$N(\varepsilon)>0$，当$n_0>N(\varepsilon)$时，有

$$\|x-\sum_{k=1}^{n_0}a_k e_k\|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ 且 } \|\sum_{k=n_0+1}^{\infty}a_k e_k\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

因为$Z$在$R$中稠，则存在$\rho_k\in Z$ $(k=1,2,\cdots n_0)$，使得

$$|a_k-\rho_k|<\frac{\varepsilon}{2n_0}$$

同时$\sum_{k=1}^{n_0}\rho_k e_k\in E$，因此

$$\left\|\sum_{k=1}^{n_0}a_k e_k-\sum_{k=1}^{n_0}\rho_k e_k\right\|=\left\|\sum_{k=1}^{n_0}(a_k-\rho_k)e_k\right\|\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{n_0}|a_k-\rho_k|\|e_k\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2n_0}\cdot n_0=\frac{\varepsilon}{2}$$

所以

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n_0}\rho_k e_k\right\|=\left\|x-\sum_{k=1}^{n_0}a_k e_k+\sum_{k=1}^{n_0}a_k e_k-\sum_{k=1}^{n_0}\rho_k e_k\right\|\leqslant$$

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n_0}a_k e_k\right\|+\left\|\sum_{k=1}^{n_0}a_k e_k-\sum_{k=1}^{n_0}\rho_k e_k\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

因此，$X$可分。

注意：此定理的逆，即任何一个可分的Banach空间都有一组Schauder基吗？答案是否定的。1973年，P.Enflo。首先

解决这个问题。

**3.3 定理** 设$X=(X,\ \|\cdot\|)$是赋范空间，则存在着一个Banach空间$\hat{X}$和等距映射$T$：$X\to W\subset\hat{X}$，并且$\overline{W}=\hat{X}$，$\hat{X}$在等距意义下唯一。

**证** 由第二章定理6.2可知，存在着完备的度量空间$\hat{X}=(\hat{X},\ \hat{d})$和等距映射$T$：$X\to W=T(X)$，且$W$在$\hat{X}$中稠。同时，在等距意义之下，$\hat{X}$是唯一的。所以，欲证明此定理，只需证明$\hat{X}$是线性空间，然后在$\hat{X}$上定义合适的范数即可。

考虑任意的$\hat{x},\hat{y}\in\hat{X}$，并且任取代表$(x_n)\in\hat{x}$和$(y_n)\in\hat{y}$，既然$\hat{x}$和$\hat{y}$都是空间$X$中的等价类，可令$z_n=x_n+y_n$，则$(z_n)$是$X$中的Cauchy序列，因为

$$\|z_n-z_m\|=\|x_n+y_n-(x_m+y_m)\|\leqslant$$
$$\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|$$

取$(z_n)$作为等价类的代表，则$(z_n)\in\hat{z}$，又定义$\hat{x}$与$\hat{y}$的和为$\hat{z}$，因此$\hat{z}=\hat{x}+\hat{y}$。此定义与属于$\hat{x}$和$\hat{y}$的Cauchy序列的选择无关，实际上，第二章定理6.2证明中的（1）式证明；如果$(x_n)\sim(x_n')$，$(y_n)\sim(y_n')$，则$(x_n+y_n)\sim(x_n'+y_n')$，因为

$$\|x_n+y_n-(x_n'+y_n')\|\leqslant\|x_n-x_n'\|+\|y_n-y_n'\|$$

同样，定义标量$\alpha$与$\hat{x}$的标量积为$\alpha\hat{x}\in\hat{X}$，并以$(\alpha x_n)$为其代表的等价类，这个定义与$\hat{x}$的代表的选取无关。$\hat{x}$中的零元是包含所有收敛于零的Cauchy序列的等价类。要检验如

此定义的线性运算具备线性空间所要求的性质(1°)～(7°)不会有什么困难。于是$\hat{X}$是一个线性空间。再从定义并利用$T$的意义，可以推得在$W$上从$\hat{X}$中诱导的线性空间的线性运算与从$X$中经映射$T$决定出的运算是一致的。

另一方面，在$W$上，$T$引入一个范数$\|\cdot\|_1$，它在每一点$\hat{y}=Tx\in W$的值有关系$\|\hat{y}\|_1=\|x\|$。在$W$上相应的度量是$\hat{X}$限制到$W$上的$\hat{d}$，因为$T$是等距映射，我们可以延拓范数$\|\cdot\|_1$到$\hat{X}$上，对于每一个$\hat{x}\in\hat{X}$，令$\|\hat{x}\|_2=\hat{d}(\hat{o},\hat{x})$，则定义2.1中的($N$1)，($N$2)显然成立。而($N$3)和($N$4)可利用对$\|\cdot\|$取极限而得出。

## 习 题

1. 在$l^\infty$中，设$Y$是只有有限多个非零分量的序列的全体作成的子集，证明$Y$是$l^\infty$的子空间，但不是闭子空间。

2. 证明：在赋范空间$X$中，$x_n\longrightarrow x$，$y_n\longrightarrow y$蕴含$x_n+y_n\longrightarrow x+y$，又当标量$\alpha_n\longrightarrow\alpha$，$x_n\longrightarrow x$时，蕴含$\alpha_n x_n\longrightarrow\alpha x$。

3. 证明：赋范空间中，绝对收敛不蕴含收敛。

4. 证明在Banach空间中，绝对收敛级数是收敛的。

5. (半范数)线性空间$X$的半范数是映射$p$：$X\longrightarrow R$，满足($N$1)，($N$3)，($N$4)。证明$p(0)=0$，$|p(y)-p(x)|\leqslant p(y-x)$。

6. 设$Y$是赋范空间$(X,\|\cdot\|)$的闭子空间，证明商空间$X/Y$的范数$\|\cdot\|_0$是

$$\|\hat{x}\|_0=\inf_{x\in\hat{X}}\|x\|$$

其中$\hat{x}\in X/Y$，即$\hat{x}$是$y$的陪集。

7. 证明：在题5中，使得$p(x)=0$的元$x\in X$的全体形成$X$的子空

间$N$，并且商空间$X/N$上的范数是 $\|\hat{x}\|_0=p(x)$，其中$x\in\hat{x}$，$\hat{x}\in X/N$。

8．（赋范空间的积）如果$(X_1, \|\cdot\|_1)$，$(X_2, \|\cdot\|_2)$是两个赋范空间，证明积线性空间$X=X_1\times X_2$成为一个赋范空间，如果定义范数

$$\|x\|=\max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2) \qquad (x=(x_1, x_2))$$

# §4 有限维赋范空间

在很多领域内，有限维赋范空间是特别重要的，这除了它具备一些特别好的简单的性质以外，同时还在于它又是最容易掌握而且是为我们了解最多的空间之一。它在逼近理论、算子谱理论中有着重要的应用，又常常是处理一些困难问题的主要工具。

**4.1 引理** 假设$\{x_1, \cdots, x_n\}$是域$K$上的赋范空间$X$中的线性无关子集，则存在常数$C>0$，使得对于任选的标量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，都有

$$\|\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\|\geqslant C(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|) \tag{1}$$

**证** 记$S=|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|$，若$S=0$，则$|\alpha_i|=0(i=1, 2, \cdots, n)$，所以，对于任意的$C>0$，(1)式成立。不妨设$S>0$，用$S$去除(1)式的两端，得到

$$\frac{\|\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\|}{S}=\left\|\frac{\alpha_1}{S}x_1+\cdots+\frac{\alpha_n}{S}x_n\right\|=$$

$$\|\beta_1x_1+\cdots+\beta_nx_n\|\geqslant C$$

其中$\beta_i=\frac{\alpha_i}{S}(i=1, 2, \cdots, n)$，并且有

$$\sum_{i=1}^{n}|\beta_i| = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\alpha_i}{S}\right| = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| = 1$$

因此，欲证（1）式成立，只需证明等价的

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geqslant C \quad \left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_i| = 1\right) \tag{2}$$

即可。

假设(2)式不成立，这意味着对于固定的$C>0$，任意选择的合于条件$\sum_{i=1}^{n}|\beta_i| = 1$的$\beta_1$，…，$\beta_n$都有$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| < C$。于是，存在着点列$\{y_m\} \in (X, \|\cdot\|)$，$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \beta_2^{(m)} x_2 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n$ $(m = 1, 2, \cdots)$ 并且$\sum_{i=1}^{n}|\beta_i^{(m)}| = 1$，使得$\|y_m\| \to 0$ $(m \to \infty)$。由条件$\sum_{i=1}^{n}|\beta_i^{(m)}| = 1$，总有$|\beta_i^{(m)}| \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n; m = 1, 2, \cdots)$，固定$i$，数列$(\beta_i^{(m)}) = (\beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}, \cdots)$有界，根据Bolzano-Weierstrass定理，此数列必存在着收敛的子序列，令$\beta_1$是该子序列的极限。我们用$(y_{1m})$表示序列$\{y_m\}$中对应于标量序列$(\beta_1^{(m)})$的收敛子序列的向量子序列。同理，对应于收敛极限为$\beta_2$的标量序列$(\beta_2^{(m)})$的子序列。$(y_{1m})$中有子序列$(y_{2m})$与之对应，继续这个作法，第$n$步，得到序列$\{y_m\}$中的一个子序列$(y_{n,m}) = (y_{n1}, y_{n2}, \cdots)$，它的每一项均可表成

$$y_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(m)} x_i$$

这里，有$\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i^{(m)}|=1$。显然$\gamma_i^{(m)}\to\beta_i$ $(m\to\infty)$，于是

$\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i^{(m)}|\longrightarrow\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|$，所以$\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|=1$。令$y=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i$，

因为对于任给的$\varepsilon>0$和充分大的$m$，有

$$
\begin{aligned}
\|y_{n,m}-y\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^{(m)}x_i-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i^{(m)}-\beta_i)x_i\right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}|\gamma_i^{(m)}-\beta_i|\,\|x_i\| \\
&\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\|x_i\|\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i^{(m)}-\beta_i|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

这就蕴含着$y_{n,m}\longrightarrow y=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i$。但是，因为$\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|=1$，

所以$\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$不可能全部为零，而且集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是线性无关的，故有$y\neq\theta$。另一方面，根据范数的连续性，还有$\|y_{n,m}\|\to\|y\|$，但由前假设$y_m\to\theta$，所以$\|y_m\|\to 0$，然而$(y_{n,m})$是$\{y_m\}$的一个子序列，必有$\|y_{n,m}\|\to 0$，再由极限的唯一性，有$\|y\|=0$，因此，$y=\theta$，这与$y\neq\theta$矛盾。

利用这个引理，可以证明下面的主要定理。

**4.2 定理** 赋范空间$X$的每一个有限维子空间$Y$都是完备的。特别，每一个有限维赋范空间是完备的。

**证** 在$Y$中，任取一个Cauchy序列$\{y_m\}\in Y$，下面证明

它收敛于$y\in Y$。设$\dim Y=n$，$\{e_1, \cdots e_n\}$是$Y$中的一组基，则每一个$y_m$都有唯一的表示：

$$y_m=\alpha_1^{(m)}e_1+\cdots+\alpha_n^{(m)}e_n$$

因为$\{y_m\}$是Cauchy序列，任给$\varepsilon>0$，存在着$N(\varepsilon)>0$，当$m, r>N(\varepsilon)$时，有$\|y_m-y_r\|<\varepsilon$。由本节引理4.1，必存在常数$C>0$，对于一切的$m$，$r>N(\varepsilon)$，都有

$$\varepsilon>\|y_m-y_r\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(m)}e_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(r)}e_i\right\|$$

$$=\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(r)})e_i\right\|>C\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(r)}|$$

因此，

$$|\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(r)}|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(r)}|<\frac{\varepsilon}{C}\qquad(i=1, 2, \cdots, n)$$

说明这n个数例

$$(\alpha_i^{(m)})=(\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \cdots)\qquad(i=1, 2, \cdots, n)$$

都是Cauchy序列，再由标量域$R$或$C$的完备性，必有$\lim\limits_{m\to\infty}\alpha_i^{(m)}=\alpha_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。

定义 $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$，显然$y\in Y$。又因为

$$\|y_m-y\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(m)}e_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|$$

$$=\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(m)}-\alpha_i)e_i\right\|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i| \, \|e_i\|$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|e_i\| \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i| < \varepsilon$$

所以有$y_m \longrightarrow y$，再由$(y_m)$的任意性，蕴含$Y$完备。

显然，有下面定理。

**4.3 定理** 赋范空间$X$的任何有限维子空间$Y$都是$X$中的闭集。

值得注意的是，此定理仅仅对有限维子空间成立，如果是无限维子空间，此结论不真。例如。$X = C[0, 1]$，$Y = \text{span}\{1, t, t^2, \cdots\}$，因而$Y$是全体多项式作成的子空间，显然$Y$不是$X$中的闭集。例如

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \notin Y$$

有限维空间中成立着一个十分重要的性质：即在有限维空间中，所有的范数都是（拓扑）等价的。这些彼此等价的范数，可以定义出相同的拓扑。

**4.4 定义** 线性空间$X$上的范数$\|\cdot\|$，叫作与$X$上的另一范数$\|\cdot\|_0$等价，如果存在着正数$a$和$b$，使得对于所有的$x \in X$，都有

$$a\|x\|_0 \leqslant \|x\| \leqslant b\|x\|_0 \tag{3}$$

由这个定义，容易证明在赋范空间$(X, \|\cdot\|)$和$(X, \|\cdot\|_0)$中有相同的收敛性，因而有相同的Cauchy序列。

**4.5 定理** 在有限维空间$X$中，范数彼此等价。

**证** 令$\dim X = n$，$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$是空间$X$的一组基，

$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_0$是定义在$X$上的任意两个范数。对于每一个$x\in X$，在这组基下有唯一的表示：

$$x=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n$$

由本节引理4.1，存在着正数$C>0$，使得

$$\|x\|=\|\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n\|\geqslant C(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|)$$

另一方面，

$$\|x\|_0=\left\|\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i\right\|_0\leqslant\sum_{i=1}^n|\alpha_i|\,\|e_i\|_0\leqslant K\sum_{i=1}^n|\alpha_i|$$

其中$K=\max\limits_i\|e_i\|_0$，两式合起来，有

$$\frac{1}{C}\|x\|\geqslant\sum_{i=1}^n|\alpha_i|\geqslant\frac{1}{K}\|x\|_0$$

亦即

$$\|x\|\geqslant\frac{C}{K}\|x\|_0=a\|x\|_0\qquad\left(a=\frac{C}{K}\right)$$

重复上面作法，只是互换$\|\cdot\|_0$与$\|\cdot\|$，得到另一个不等式。

## 习　题

1. 举出空间$l^\infty$和$l^2$的子空间非闭的例子.

2. 证明定义4.4中(3)式确定了有限维空间中范数之间的等价关系.

3. 在空间$R^n$中，令$\|x\|_2=\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}$，而$\|\cdot\|$是该空间中任意范数，不用定理4.5，直接证明对于所有的$x\in R^n$，存在着$\|x\|\leqslant b\|x\|_2$.

4. 在线性空间$X$中，如果二范数$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$彼此等价，证明：$\|x_n-x\|_1\longrightarrow0$，蕴含$\|x_n-x\|_2\longrightarrow0$.

5. 证明对于固定的$m$和$n$，全体$m\times n$复矩阵$A=(a_{ik})$作成了$m\times n$维线性空间$M$，并且在$M$中，所有的范数都是彼此等价的．如果在

此空间中定义

$$||A||_1=|a_{11}|+\cdots+|a_{1n}|+\cdots+|a_{m1}|+\cdots+|a_{mn}|;$$

$$||A||_2=(|a_{11}|^2+\cdots+|a_{1n}|^2+\cdots+|a_{m1}|^2+\cdots+|a_{mn}|^2)^{1/2};$$

$$||A||_\infty=\max\{|a_n|,\ \cdots|a_{mn}|\};$$

就这三种范数进行说明。

## §5 列紧性和有限维数

列紧性（或紧性）是泛函分析理论中的一个重要概念，它是$R$空间中Borel-Weierstrass定理向一般度量空间的推广。有限维和无限维空间以及其上的映射的若干性质都与列紧性有关。

**5.1 定义** 度量空间X称为是**列紧**的，如果X中每一个序列都存在一个收敛的子序列。子集$A\subset X$称为是列紧的，如果$A$作为一个空间是列紧的，亦即，A中的任何序列都包含收敛的子序列，其极限元仍在A中。

注意：列紧集的子集必是列紧的。在一个集族中包含一个列紧集，则集族的交亦列紧。列紧的度量空间必定是完备且可分的。

**5.2 引理** 度量空间X的列紧子集$A$必是闭集且有界。

**证** 对于任意的$x\in\overline{A}$，由闭包的定义，必存在点列$\{x_n\}\in A$，且$x_n\longrightarrow x$，但因为$A$是列紧的，必存在子序列$\{x_{n_k}\}$使得$x_{n_k}\longrightarrow x(n_k\to\infty)$，并且$x\in A$。因此，$\overline{A}\subset A$，故$A$是闭集。

现在来证明$A$有界。假设结论不真，即$A$是无界的，于是，必存在序列$\{y_n\}\in A$，使得对于固定的元$b\in A$，和充分大的$n$，有$d(y_n,\ b)>n$，这个序列不可能存在任何收敛的子

序列，因为，由第二章引理4.2，任何收敛序列必须有界，于是$A$不是列紧的，与假设矛盾。

值得注意的是：引理4.2所给的条件仅是充分的，不是必要的。即存在着度量空间中的有界闭集但不是列紧集。例如：令$X=l^2x$，虽然$X$是度量空间，$(e_n)\in l^2$，其中$e_n=(\delta_{ni})$，即第$n$个分量为1，其它分量皆为零，如此的无穷序列为元作成的点列，显然$(e_n)$有界，因为$\|e_n\|=1$。序列$(e_n)$作成的集是闭集，因为它是孤立点集。但是，有$d(e_n, e_m)=\sqrt{2}$，所以它没有一个子序列可以是收敛的，因此它不是列紧集。

但是，如果考虑的空间是有限维空间，则有如下定理。

**5.3 定理** 在有限维赋范空间$X$中，任意子集$A\subset X$是列紧的充要条件是$A$为有界闭集。

**证** 由引理5.2，定理的条件是必要的，下证充分性。假设$A$为空间$X$的有界闭集，$\dim X=n$，$\{e_1, \cdots, e_n\}$是$X$中的一组基。设$\{x_m\}$是$A$中任意序列，则$x_m=\xi_1{}^{(m)}e_1+\cdots+\xi_n{}^{(m)}e_n$，显然$\{x_m\}$有界，故有常数$K$，使得$\|x_m\|\leqslant K$对于所有的$x_m$成立。根据引理4.1，存在着常数$C$，使得

$$K\geqslant\|x_m\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i{}^{(m)}e_i\right\|\geqslant C\sum_{i=1}^{n}|\xi_i{}^{(m)}|$$

因为

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i{}^{(m)}|\leqslant\frac{K}{C},\text{所以}\ |\xi_i{}^{(m)}|\leqslant\frac{K}{C}\quad\begin{pmatrix}i=1, 2, \cdots, n\\ m=1, 2, \cdots\end{pmatrix}$$

于是，对于固定的$i$，数列$(\xi_i{}^{(m)})$有界，根据Bolzano-Weierstrass定理，必有聚点$\xi_i(1\leqslant i\leqslant n)$存在，如引理4.1的证明中同样的作法，可断定$\{x_m\}$有子序列$(z_m)$收敛于$z$

$=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$，又因为$A$是闭集，故$z\in A$，说明$A$中任意序列都有在其中收敛的子序列，$A$是列紧集。

**5.4 引理**（F.Riesz） 设$Y$、$Z$都是赋范空间$X$的子空间，$Y$是闭集且是$Z$的真子集，则对于一切$\theta(0<\theta<1)$，必存在$z\in Z$。使得$\|z\|=1$，$\|z-y\|>\theta$，对于一切$y\in Y$成立。

**证** 考虑任意的$\upsilon\in Z-Y$，用$\alpha$表示$\upsilon$到$Y$的距离，$\alpha=\inf\limits_{y\in Y}\|\upsilon-y\|$、因为$Y$是闭集，故$\alpha>0$，取$\theta\in(0,1)$，则存在$y_0\in Y$，使得

$$\alpha\leqslant\|\upsilon-y_0\|<\alpha/\theta \tag{1}$$

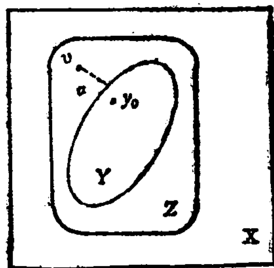


图3-1 引理5.4证明图示

令$z=\beta(\upsilon-y_0)$，这里$\beta=\|\upsilon-y_0\|^{-1}$，则$\|z\|=1$，下证，对于全体$y\in Y$，$\|z-y\|\geqslant0$。显然有

$$\begin{aligned}\|z-y\|&=\|\beta(\upsilon-y_0)-y\|\\&=\beta\|\upsilon-y_0-c^{-1}y\|\\&=\beta\|\upsilon-y_1\|,\end{aligned}$$

其中$y_1=y_0+c^{-1}y$。由于$Y$是$X$的赋范子空间，所以$y_1\in Y$，由定义，必有$\|\upsilon-y_1\|\geqslant\alpha$，于是

$$\|z-y\|=\beta\|\upsilon-y_1\|=\frac{1}{\|\upsilon-y_0\|}\cdot\|\upsilon-y_1\|$$

$$\geqslant\frac{\alpha}{\|\upsilon-y_0\|}>\frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\theta}}=\theta$$

再由$y$的任意性，结论成立（图3-1）。

**5.5 定理** 如果赋范空间$X$的的闭单位球$B=\{x \mid \|x\| \leq 1\}$是列紧的，则$\dim X<+\infty$。

**证** 假设$B$是列紧的，但$\dim X=+\infty$，我们将导出矛盾，任意选择$x_1 \in B \subset X$，且$\|x_1\|=1$，令$X_1=\mathrm{span}\{x_1\}$，则$\dim X_1=1$，由定理4.3知它是闭的，因为$\dim X=+\infty$，所以$X_1$是$X$的真子空间。又由引理5.4，存在着$x_2 \in B \subset X$，$\|x_2\|=1$，使得$\|x_2-x_1\| \geq \theta=1/2$。于是$X_2=\mathrm{span}\{x_1, x_2\}$，且$X_2 \subset X$。同上作法，存在$x_3 \in B$，对于一切$x \in X_2$，都有$\|x_3-x\| \geq 1/2$，特别$\|x_3-x_1\| \geq 1/2$，$\|x_3-x_2\| \geq 1/2$，如此作法，得到一个序列$\{x_n\} \in B$，$\|x_n\|=1$，并且$\|x_m-x_n\| \geq 1/2 (m \neq n)$，显然，$\{x_n\}$中没有收验的子序列，因此，$B$不是列紧的，这与$B$列紧的假设矛盾。所以，$\dim X<+\infty$。

这个定理有较多的应用，它说明，在无限维赋范空间中，闭单位球不必是列紧的。但是，连续映射却把列紧集映成列紧集。

**5.6 定理** 假设$X$和$Y$是度量空间，$T$：$X \longrightarrow Y$是连续映射，则$X$中的列紧子集$A$在映射$T$下的象集仍是列紧集。

**证** 设$\{y_n\} \in T(A) \subset Y$，必有$\{x_n\} \in A$，使得$y_n=Tx_n$，因为$A$是列紧的，所以，$\{x_n\}$中必有收敛的子序列$\{x_{n_k}\}$。但是，T是连续映射，由第二章定理4.7，子序列$\{x_{n_k}\}$的象$\{Tx_{n_k}\}=\{y_{n_k}\}$必在$T(A)$中收敛，所以$T(A)$列紧。

**5.7 推论** 度量空间$X$中的列紧子集$A$到$R$里的连续映射（又叫连续泛函）在$A$的一些点上取得最大和最小值。

**证** 由定理5·6，$T(A) \subset R$是列紧子集，所以$T(A)$必为有界闭集，于是$\inf T(A) \in T(A)$，并且$\sup T(A) \in T(A)$，所以，使得这两式成立的逆象必是$A$中的点，在这些点$x$处，$Tx$分别取得最小值与最大值。

推论5.7是微积分中闭区间上连续函数的最大最小值定理向一般度量空间的推广。这也使我们进一步看出：正是因为闭区间是实直线$R$中的列紧子集，所以，定义在其上的连续函数才具备一些很好的性质。

### 习　题

1． 证明：$R^n$和$C^n$不是列紧的。

2． (局部紧)度量空间$X$叫作是局部紧的，如果$X$的每一点都有一个紧邻域．证明$R$和$C$以及更一般的$R^n$和$C^n$是局部紧的．

3． 证明空间$s$中的无穷子集$A$是列紧的，当且仅当存在着一组数$a_1$，$a_2$，…，使得对于所有的$x=(\xi_k(x))\in A$，都有$|\xi_k(x)|\leqslant a_k$．

4． 如果$\dim Y<+\infty$，证明：甚至选择$\theta=1$，Riesz引理5.4仍成立．

5． 如果$X$是列紧度量空间，且子集$A\subset X$是闭的，证明$A$列紧．

6． 设$X$和$Y$都是度量空间，$X$列紧，且$T$：$X\longrightarrow Y$是连续双射．证明$T$是同胚映射．

## §6　线性算子

在泛函分析中，我们除了研究无限维空间本身所具有的属性以外，尤其对这些空间之间的映射感兴趣。定义在线性空间（尤其是赋范空间）中的映射，称为算子。显然，定义在线性空间中的算子中，仍旧保持加法与标量乘法的算子，即线性算子是最为简单也是最为有用的。

**6.1　定义**　一个**线性算子**$T$：$\mathscr{D}(T)\longrightarrow Y$，满足下述条件：

（Ⅰ）　$T$的定义域$\mathscr{D}(T)$是一个线性空间，值域$\mathscr{R}(T)\subset Y$，其中$Y$是线性空间。

（Ⅱ） 对于所有的$x$，$y\in\mathscr{D}(T)$和标量$\alpha$，有

$$(1^\circ)\quad T(x+y)=Tx+Ty; \tag{1}$$

$$(2^\circ)\quad T(\alpha x)=\alpha Tx。$$

今后，我们还经常用记$\mathscr{N}(T)$表示算子$T$的**零空间**，亦即$\mathscr{N}(T)=\{x\in\mathscr{D}(T)\,|_{Tx=0}\}$。

特别，如果算子$T$的值域$\mathscr{R}(T)$是实直线$R$或复平面$C$中的子集，则这样的算子$T$特别叫作**泛函数**，也简称为**泛函**。当然，如果$T$还是线性的，则称为**线性泛函**。

假设$X$和$Y$都是域$K$上的线性空间，并且$\mathscr{D}(T)\subset X$，$\mathscr{R}(T)\subset Y$，则记号$T$：$\mathscr{D}(T)\longrightarrow\mathscr{R}(T)$，表示$T$是$\mathscr{D}(T)$到$\mathscr{R}(T)$上的算子；记号$T$：$\mathscr{D}(T)\longrightarrow Y$，表示$T$是$\mathscr{D}(T)$到$Y$里的算子；如果$\mathscr{D}(T)=X$，则记$T$：$X\longrightarrow Y$。如果$T$：$\mathscr{D}(T)\longrightarrow Y$是线性算子，则(1)式等价于对于一切$x$，$y\in\mathscr{D}(T)$和所有的$\alpha$，$\beta\in K$都有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y) \tag{2}$$

在(1)式中，取$\alpha=0$，则有

$$T0=0 \tag{3}$$

上面的说法和记号以后我们要经常使用，请注意严格区分它们。

总之，线性算子就是保持线性空间之间两种代数运算的映射。如果$T$：$\mathscr{D}(T)\longrightarrow Y$，且$\mathscr{D}(T)\subset X$，$X$和$Y$都是域$K$上的线性空间，$T$保持线性运算是指先将$x,y\in\mathscr{D}(T)$映入$Y$中，在$Y$中相加起来（$Y$中的加法$\oplus$）与先在$\mathscr{D}(T)$中相加（$X$中的加法$+$）再映到$Y$中，其结果完全一样，亦即$T(x+y)=Tx\oplus Ty$。标量乘法也是一样。注意：今后两个空间中的加法，我们一般都使用相同的记号。这种映射，在近世代数中称为**同态映射**，或简称**同态**。

正是线性算子具备着如此良好的代数性质，才使得它在泛函分析中成为重要的研究对象。

### 6.2 线性算子的例

(1°) **恒同算子** $I$: $X\to X$, $I$: $x\mapsto x$, 或$Ix=x$对于一切$x\in X$成立。显然它是线性算子。

(2°) **零算子** $O$: $X\to Y$, 对于全体$x\in X$, $Ox=\theta$。显然$\mathcal{N}(O)=X$。易知它是线性算子。

(3°) **微分算子** 设$X=C^1[a, b]$（其定义见第二章§5习题8），则按$C[a,b]$中的线性运算作成线性空间，$Y=C[a, b]$。定义$T$: $X\longrightarrow Y$, 对于任意的$x(t)\in X$, $T(x(t))=dx(t)/dt=x'(t)$，易证$T$是线性算子，称为微分算子。

如果取$Y=R$，对于固定的$t_0\in[a, b]$，定义$T$: $C^1[a, b]\to R$,

$$Tx(t)=x'(t_0)=\frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=t_0}$$

则$T$是一个线性泛函。

(4°) **积分算子** $T$: $C[a, b]\longrightarrow C[a, b]$，则对于任意的$x(t)\in C[a, b]$, $Tx(t)=\int_a^t x(\tau)d\tau$，则$T$是线性算子。

但如果$Tx(t)=\int_a^b x(\tau)d\tau$，则$T$是一个实线性泛函。

如果定义$Tx(t)=tx(t)$，则$T$亦是一个线性算子，它在量子力学中会碰到。

(5°) 在$R^3$中，给定向量$\vec{a}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\in R^3$,则对于任意向量$\vec{x}=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\in R^3$，向量积

$$T\vec{x}=\vec{a}\times\vec{x}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{vmatrix}$$

定义了线性算子$T$：$R^3\longrightarrow R^3$。而数积

$$\widetilde{T}\vec{x}=\vec{a}\cdot\vec{x}=a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3$$

定义了线性泛函$\widetilde{T}$：$R^3\longrightarrow R$。

（6°） **矩阵** 设$R^n$和$R^m$分别是$n$维和$m$维实线性（向量）空间，一个给定的$m\times n$实矩阵$A=(a_{ij})$定义了一个线性算子$T$：$R^n\longrightarrow R^m$，记为$y=Ax$，其中$x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)^{T(*)}$，$y=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_m)^T$，根据矩阵乘法，有

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \vdots & \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

利用矩阵乘法的线性性质，容易证明算子$T$是线性算子。如果$A$是复矩阵，则按照上述方法所决定的是$C^n$到$C^m$中的线性算子。

这里，矩阵$A$与线性算子$T$之间的关系值得注意，以后，我们还要作进一步讨论。

现在讨论线性算子所具备的一些基本性质。

**6.3 定理** 设$X$和$Y$是域$K$上的线性空间，$T$：$\mathscr{D}(T)\to Y$，是线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$，则

（Ⅰ） 值域$\mathscr{R}(T)$是线性空间；

（Ⅱ） 若$\dim\mathscr{D}(T)=n<+\infty$，则$\dim\mathscr{R}(T)\leqslant n$；

（Ⅲ） 零空间$\mathscr{N}(T)$是线性空间。

**证** （Ⅰ） 对于任意的$y_1$，$y_2\in\mathscr{R}(T)$和$\alpha,\beta\in K$，则存在

---

(*) 记号$T$表示线性代数中的转置运算。

着$x_1$，$x_2 \in \mathscr{D}(T)$，使得$y_1 = Tx_1$，$y_2 = Tx_2$，因为$\mathscr{D}(T)$是线性空间，有$\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathscr{D}(T)$，由$T$的线性性，

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathscr{R}(T)$$

又由$y_1$，$y_2$，$\alpha$，$\beta$的任意性，因此$\mathscr{R}(T)$是线性空间。

（Ⅱ） 任取$n+1$个元$y_1$，$y_2$，…，$y_{n+1} \in \mathscr{R}(T)$，则必存在着$\mathscr{D}(T)$中的元$x_1$，$x_2$，…，$x_{n+1}$，有$y_1 = Tx_1$，$y_2 = Tx_2$，…，$y_{n+1} = Tx_{n+1}$，由于$\dim \mathscr{D}(T) = n < +\infty$，所以$\{x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}\}$是线性相关集，故必存在不全为零的标量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_{n+1}$，使得

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$$

$T$是线性算子，$T0 = 0$，于是

$$T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0$$

然而，$\alpha_1$，…，$\alpha_{n+1}$不全为零，这说明$\{y_1, y_2, \cdots y_{n+1}\}$也是线性相关的。又由$y_1$，$y_2$，…，$y_{n+1}$选取的任意性，可以断定$\mathscr{R}(T)$中没有$n+1$个或更多的元的向量组是线性无关的。于是$\dim \mathscr{R}(T) \leqslant n$。

（Ⅲ） 任取$x_1$，$x_2 \in \mathscr{N}(T)$，则$Tx_1 = Tx_2 = 0$，由于$T$是线性算子，对于任意的$\alpha$，$\beta \in K$，有$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = 0$，故$\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathscr{N}(T)$，因而$\mathscr{N}(T)$是线性空间。

大家知道，映射$T$：$\mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$称为单射或一一映射：如果定义域中不同的元有不同的象，亦即，对于任意的$x_1$，$x_2 \in \mathscr{D}(T)$，

$$\text{若} x_1 \neq x_2, \text{ 则} Tx_1 \neq Tx_2 \tag{4}$$

或等价地，

$$\text{若} Tx_1 = Tx_2, \text{ 则} x_1 = x_2 \tag{5}$$

此时，存在着映射

$$T^{-1}: \mathscr{R}(T) \longrightarrow \mathscr{D}(T) \tag{6}$$

$$y \longmapsto x(y = Tx)$$

它映所有的$y\in\mathscr{R}(T)$到$x\in\mathscr{D}(T)$上，这里$T^{-1}y=x$，则称 $T^{-1}$为映射$T$的**逆映射**。

由上述定义，对于全体$x\in\mathscr{D}(T)$，$T^{-1}Tx=x$；同样，对于全体$y\in\mathscr{R}(T)$，$TT^{-1}y=y$。

如果算子$T$是线性的，那么，可以借助于空间来判定其逆算子存在与否。

**6.4 定理** 设$X$和$Y$是同域上的二线性空间，$T$：$\mathscr{D}(T)\longrightarrow Y$是线性算子，并且$\mathscr{D}(T)\subset X$，$\mathscr{R}(T)\subset Y$，则

（Ⅰ） 逆算子$T^{-1}$：$\mathscr{R}(T)\longrightarrow\mathscr{D}(T)$存在的充要条件是$Tx=0$时蕴含$x=0$；

（Ⅱ） 如果$T^{-1}$存在，则$T^{-1}$是线性算子；

（Ⅲ） 若$\dim\mathscr{D}(T)=n<+\infty$，逆算子$T^{-1}$存在，则$\dim\mathscr{R}(T)=\dim\mathscr{D}(T)=n$。

**证** （Ⅰ）充分性。假设$Tx=0$蕴含$x=0$，令$Tx_1=Tx_2$，由$T$的线性性，必有$T(x_1-x_2)=Tx_1-Tx_2=0$，于是$x_1-x_2=0$，$x_1=x_2$，由(5)式，逆算子$T^{-1}$存在。

必要性。若$T^{-1}$存在，则(5)式成立。在(5)式中取$x_2=0$，再使用(3)式，得到$Tx_1=T0=0$，若$x_1\neq 0$，则与(5)式相悖，因此，$x_1=0$。

（Ⅱ） 假设$T^{-1}$存在，则$T^{-1}$的定义域是$\mathscr{R}(T)$，根据定理6.3（Ⅰ），它是线性空间。考虑任意的$x_1$，$x_2\in\mathscr{D}(T)$，其象分别是$y_1=Tx_1$和$y_2=Tx_2$，而$x_1=T^{-1}y_1$，$x_2=T^{-1}y_2$，则对于任意的$\alpha$，$\beta\in K$，

$$\alpha y_1+\beta y_2=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=T(\alpha x_1+\beta x_2)$$

所以

$$T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=T^{-1}T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha x_1+\beta x_2$$

$$= \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2$$

因此，$T^{-1}$是线性算子。

（Ⅲ） 由定理6.3（Ⅱ），有$\dim \mathscr{R}(T) \leqslant \dim \mathscr{D}(T)$，但由（Ⅱ），$T^{-1}$：$\mathscr{R}(T) \longrightarrow \mathscr{D}(T)$也是线性算子，使用同样的定理，$\dim \mathscr{D}(T) \leqslant \dim \mathscr{R}(T)$，两式合起来推得$\dim \mathscr{R}(T) = \dim \mathscr{D}(T) = n$。

**6.5 定理** 设$T$：$X \longrightarrow Y$，$S$：$Y \longrightarrow Z$是双射线性算子，且$X$，$Y$，$Z$都是同域上的线性空间，则积算子$ST$的逆$(ST)^{-1}$：$Z \longrightarrow X$存在，并且

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1} \qquad (7)$$

**证** 算子$ST$：$X \longrightarrow Z$是双射，故$(ST)^{-1}$存在，所以有$ST(ST)^{-1} = I_Z$，$I_Z$表示空间$Z$中的恒同算子。上式两端左乘$S^{-1}$，注意到$S^{-1}S = I_Y$，于是

$$S^{-1}ST(ST)^{-1} = S^{-1}I_Z$$

因此

$$T(ST)^{-1} = S^{-1}I_Z = S^{-1}$$

再左乘$T^{-1}$，注意到$T^{-1}T = I_X$，所以推得

$$T^{-1}T(ST)^{-1} = (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

亦即

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

## 习　　题

1． 证明从$R^2$到$R^2$中的算子

$T_1$：$(\xi_1,\xi_2) \longmapsto (\xi_1,0)$；$T_2$：$(\xi_1,\xi_2) \longmapsto (0,\xi_2)$；

$T_3$：$(\xi_1,\xi_2) \longmapsto (\xi_2,\xi_1)$；$T_4$：$(\xi_1,\xi_2) \longmapsto (r\xi_1,r\xi_2)$

都是线性算子，说明它们的几何意义。

2． 上题中算子$T_1$，$T_2$，$T_3$，$T_4$的定义域、值域、零空间分别是

什么？

3. 证明题1中的算子$T_1$和$T_3$可交换。

4. 设$X$是全体$2\times 2$复矩阵作成的线性空间，定义算子$T$：$X\longrightarrow X$为$Tx=bx$，其中$b\in X$是某固定元，$bx$由通常的矩阵乘法确定。证明$T$是线性算子。在什么条件之下，其逆存在？

5. 设$T$：$D(T)\longrightarrow Y$是线性算子，其逆存在，如果$\{x_1,\cdots,x_n\}$是$D(T)$中一个线性无关集，证明集$\{Tx_1,\cdots,Tx_n\}$也是$Y$中线性无关集。

6. 令$T$：$X\longrightarrow Y$是线性算子，$\dim X=\dim Y=n<+\infty$，证明$R(T)=Y$当且仅当$T^{-1}$存在。

7. 设$X$是定义在$R$上并在$R$上有任意阶导数的全体实值函数作成的线性空间，定义$T$：$X\longrightarrow X$为$y(t)=Tx(t)=x'(t)$。证明$R(T)$是全空间$X$，但是$T^{-1}$不存在。

## §7 有界线性算子和连续线性算子

赋范空间中的线性算子和线性泛函是泛函分析中的主要研究对象之一，而线性算子的有界性与连续性之间的本质联系却是一个十分重要的结果。本节中，除了研究这些问题以外，还要讨论一些基本的概念和定理。

**7.1 定义** 设$X$和$Y$都是同域上的赋范空间，$T$：$D(T)\longrightarrow Y$是线性算子，其中$D(T)\subset X$，称算子$T$是**有界**的，如果存在着正数$C$，使得对于一切$x\in D(T)$，恒有

$$\|Tx\|\leqslant C\|x\| \tag{1}$$

注意：(1)式两端的范数采用了相同的记号，其实它们是两个不同空间中的范数，是不相同的，应严格分清。

这里定义的算子的有界性与微积分中函数的有界性略有不同。微积分中其实是要求值域有界，对定义域没有要求。

例如，$f(t)=\sin t$是有界函数，$\mathscr{D}(f)=\mathscr{R}$，$\mathscr{R}(f)=[-1,1]$，即$|f(t)|\leqslant 1$。但是，有界算子，除了$\mathscr{R}(T)$是有界集以外，还要求定义域$\mathscr{D}(T)$也是有界集。所以，粗略地说来，有界算子是有界集到有界集的映射。

因为$T$是线性算子，有$T0=0$。那么，对于所有的非零元$x\in\mathscr{D}(T)$，使得(1)式成立的最小正数$C$是什么呢？

当$x\neq 0$时，有$\|x\|\neq 0$，于是

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant C$$

$C$是左端量的上界，于是令最小上界为

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq 0}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{2}$$

称为算子$T$的范数。如果$\mathscr{D}(T)=\{0\}$，则规定$\|T\|=0$，如果$T=O$，由（2）式，显然有$\|T\|=\|O\|=0$。

用$C=\|T\|$代入(1)式，得到一个重要而有用的公式

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\|x\| \quad (\text{对一切}x\in\mathscr{D}(T)\text{成立}) \tag{3}$$

在(2)式中，称右端为$T$的范数，这当然不是偶然为之，其依据看下面的引理。

**7.2 引理** 假设$T$是定义**7.1**中给出的有界线性算子，则

（Ⅰ）关于$T$的范数的另一计算公式为

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in D(T)\\ \|x\|=1}}\|Tx\| \tag{4}$$

（Ⅱ）由(2)式定义的范数满足公理（$N1$）～($N4$)。

**证** （Ⅰ）设$x\neq 0$，令$y=x/\|x\|$，则$\|y\|=1$，因为$T$是线

性算子，则（2）式给出

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in D(T)\\x\neq 0}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{\substack{x\in D(T)\\x\neq 0}}\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|=\sup_{\substack{y\in D(T)\\\|x\|=1}}\|Ty\|$$

用合于条件$\|x\|=1$的$x$代替上式中的$y$，得到(4)式。

（Ⅱ）现证由（2）或（4）式定义的$\|T\|$满足范数四公理。

因为$\|T\|=\sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\\|x\|=1}}\|Tx\|\geqslant 0$，$(N_1)$成立。如果$\|T\|=0$对一切$x$成立，则对于所有的$x\in\mathscr{D}(T)$，$Tx=0$，因此$T=0$，得到$(N2)$。若对于任意的$a\in K$，$\|aT\|=\sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\\|x\|=1}}\|aTx\|=\sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\\|x\|=1}}|a|\cdot\|Tx\|=|a|\sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\\|x\|=1}}\|Tx\|=|a|\|T\|$，于是$(N_3)$真确。最后，对于$x\in D(T)$，$\|T_1+T_2\|=\sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\\|x\|=1}}\|(T_1+T_2)x\|=\sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\\|x\|=1}}\|T_1x+T_2x\|\leqslant\sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\\|x\|=1}}\|T_1x\|+\sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\\|x\|=1}}\|T_2x\|=\|T_1\|+\|T_2\|$，公理$(N4)$亦成立，所以$\|T\|$是$T$的范数。

由(2)式和(4)式所定义的有界线性算子$T$的范数，是一个很重要的概念，今后有很多应用。下面给出一些有界和无界线性算子的例子。

**7.3 例**

（1°）**恒同算子** 设赋范空间$X\neq\{0\}$定义$I$：$X\longrightarrow X$，$Ix=x$，因为

$$\|I\|=\sup_{\substack{x\in D(T)\\x\neq 0}}\frac{\|Ix\|}{\|x\|}=\sup_{\substack{x\in D(T)\\x\neq 0}}\frac{\|x\|}{\|x\|}=1$$

显然，$I$是有界线性算子。

（2°）**零算子** 赋范空间$X$上的零算子$O$：$X\longrightarrow Y$，是

有界线性算子，且$\|O\|=0$

（3°）**微分算子** 设$X$是区间〔0,1〕上全体多项式作成的赋范空间，其范数为$\|x\|=\max\limits_{0\leq t\leq 1}|x(t)|$，其中$x(t)\in X$，定义算子$T$：$X\longrightarrow X$，$Tx(t)=x'(t)$，该算子显然是线性的，但是无界。取$x_n(t)=t^n$，$n$是正整数。$\|x_n\|=\|t^n\|=\max\limits_{0\leq t\leq 1}|t^n|=1$，但是，$Tx_n(t)=(t^n)'=nt^{n-1}$，于是，$\|Tx_n\|=\|nt^{n-1}\|=\max\limits_{0\leq t\leq 1}|nt^{n-1}|=n$，因此$\dfrac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|}=n$，由于$n$可以任意增大，故不存在常数$C>0$，使得$\dfrac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|}=n<C$，所以，$T$无界。

微分算子的重要性是不言而喻的。然而，它却是一类线性无界算子，这说明在泛函分析中，仅仅研究有界线性算子是不够的。

（4°）**积分算子** 算子$T$：$C$〔0，1〕$\longrightarrow C$〔0，1〕，对于$x(t)\in C$〔0,1〕，有$y(t)=Tx(t)=\int_0^1 K(t,\tau)x(\tau)d\tau$，其中$K(t,\tau)$是已知二元函数，称为算子$T$的核。假定$K(t,\tau)$在$t$-$\tau$平面上闭正方形区域$G=$〔0,1〕×〔0,1〕上连续。显然$T$是线性算子。下证$T$有界。因为核$K(t,\tau)$在闭区域〔0,1〕×〔0,1〕连续，必有界，亦即存在常数$K_0$对于一切$0\leq t\leq 1$，$0\leq\tau\leq 1$，有$|K(t,\tau)|\leq K_0$（例如可取$\max\limits_{\substack{0\leq t\leq 1\\0\leq\tau\leq 1}}|K(t,\tau)|=K_0$），于是

$$\begin{aligned}\|y\|=\|Tx\|&=\max_{0\leq t\leq 1}\left|\int_0^1 K(t,\tau)x(\tau)d\tau\right|\\&\leq\max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1|K(t,\tau)||x(\tau)|d\tau\leq K_0\int_0^1\max_{0\leq t\leq 1}|x(\tau)|d\tau\\&=K_0\|x\|\end{aligned}$$

所以，$T$有界。

(5°) **矩阵** 我们已经知道，一个矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$决定了一个线性算子$T$：$R^n \longrightarrow R^m$，

$$y = Ax \tag{5}$$

其中$x=(\xi_i)$，$y=(\eta_i)$分别是$n$维和$m$维的向量，写成分量形式，有

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j \qquad (i=1,\ 2\cdots,\ m) \tag{6}$$

利用Cauchy-Schwarz不等式，得到

$$\|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\eta_i^2 = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j)^2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\right)^{1/2}\right]^2$$

$$= \|x\|^2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2 = C^2\|x\|^2$$

这里

$$C^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$$

所以，$\|Tx\| \leqslant C\|x\|$，当矩阵$A$给定时，$C$亦固定，因此，$T$是有界线性算子。

**7.4 定理** 如果赋范空间$X$是有限维的，则$X$上的线性算子都是有界的。

**证** 设$\dim X = n$，且$\{e_1,\ \cdots, e_n\}$是$X$的一组基。任取$x\in X$，则$x = \sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$，令$T$是定义在$X$中的任意线性算子，有

$$\|Tx\| = \|\sum_{i=1}^{n}\xi_i Te_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\|Te_i\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\|Te_i\|\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|$$

利用引理4.1，推得

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i| \leqslant \frac{1}{C}\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\| = \frac{1}{C}\|x\|$$

所以

$$\|Tx\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\|Te_i\|\cdot\frac{1}{C}\|x\| = K\|x\|$$

这里 $K = \frac{1}{C}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|Te_i\|$，故$T$有界。

**7.5 定理** 设$X$，$Y$是同域上的赋范空间，$T$：$X \longrightarrow Y$是线性算子，如果$T$在$x_0 \in X$处连续，则$T$在$X$上处处连续。

**证** 对于任意一点$x \in X$，设$\{x_n\} \in X$，且$x_n \longrightarrow x$，则$x_n - x + x_0 \longrightarrow x_0$，由假设$T$在$x_0$处连续，于是，$T(x_n - x + x_0 = Tx_n - Tx + Tx_0 \longrightarrow Tx_0$，因此，$Tx_n \longrightarrow Tx$，即$T$在点$x$处连续，又由$x$的任意性，所以$T$在$X$上是连续的。

值得注意的是，依据此定理，要研究赋范空间中线性算子在全空间的连续性，只需讨论$T$在$x = 0$处的连续性即可。

**7.6 定理** 设$X$和$Y$是同域上的赋范空间，$T$：$\mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$，$\mathscr{D}(T) \subset X$，则$T$连续的充要条件是$T$有界。

**证** 如果$T$是零算子，结论成立。不妨设$T \neq 0$，则$\|T\| \neq 0$。

充分性。假设$T$有界，即存在常数$M > 0$，使得$\|T\| < M$，下证$T$连续，这只需证$T$在$X = 0$处连续即可。任给$\varepsilon > 0$，若$X \in \mathscr{D}(T)$，且$\|x - 0\| = \|x\| < \delta$，其中$\delta = \varepsilon/\|T\|$，由$T$的线性性，

$$\|Tx-T0\|=\|Tx\|\leqslant\|T\|\|x\|<\|T\|\delta=\varepsilon$$

必要性。假设$T$在$\mathscr{D}(T)$上连续，现证$T$有界。若结论不真，即$T$不是有界的，则对于自然数$n$，存在着点列$\{x_n\}\in\mathscr{D}(T)$，使得$\|Tx_n\|>n\|x_n\|$，令$y_n=x_n/\sqrt{n}\|x_n\|$，则

$$\|y_n\|=\left\|\frac{x_n}{\sqrt{n}\|x_n\|}\right\|=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

**因为$T$连续，必有$Ty_n\longrightarrow 0$。但是，另一方面，**

$$\|Ty_n\|=\left\|\frac{Tx_n}{\sqrt{n}\|x_n\|}\right\|=\frac{1}{\sqrt{n}\|x_n\|}\|Tx_n\|$$

$$>\frac{n\|x_n\|}{\sqrt{n}\|x_n\|}=\sqrt{n}$$

**推出矛盾。**

**7.7 推论** 假设$T$是有界线性算子，则

（Ⅰ）$x_n\longrightarrow x$，蕴含$Tx_n\longrightarrow Tx$；

（Ⅱ）零空间$\mathscr{N}(T)$是闭的。

**证** （Ⅰ）由定理**7.5**，结论显然。

（Ⅱ）对于每一个$x\in\overline{\mathscr{N}(T)}$，存在着$\mathscr{N}(T)$中的序列$\{x_n\}$，使得$x_n\longrightarrow x$。由（Ⅰ），必有$Tx_n\longrightarrow Tx$，但是，$Tx_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$，于是必有$Tx=0$，于是$x\in\mathscr{N}(T)$，又由$x$的任意性，$\mathscr{N}(T)$是闭集。

假设$X$，$Y$，$Z$是同域上的赋范空间，$T$：$X\to X$，$T_1$：$Y\to Z$，$T_2$：$X\to Y$，且$T$，$T_1$，$T_2$都是有界线性算子，容易证明

$$\|T_1T_2\|\leqslant\|T_1\|\|T_2\|,\quad \|T^n\|\leqslant\|T\|^n \quad (n\text{是自然数}) \qquad (7)$$

我们称二算子$T_1$与$T_2$是相等的，$T_1 = T_2$，如果它们有相同的定义域，并且对于所有的$x \in \mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T_2)$，恒有$T_1 x = T_2 x$。

称算子$T$：$\mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$为限制于子集$B \supset \mathscr{D}(T)$上，记为$T|_B$，如果$T|_B$：$B \longrightarrow Y$，即对于所有的$x \in B$，都有$T|_B x = Tx$。

反之，称算子$T$为到集$A \supset \mathscr{D}(T)$上的延拓，如果$\widetilde{T}$：$A \longrightarrow Y$，使得$\widetilde{T}|_{D(T)} = T$。即对于所有的$x \in \mathscr{D}(T)$，都有$\widetilde{T}x = Tx$（即$T$是$\widetilde{T}$在$\mathscr{D}(T)$上的限制。）

把一个算子延拓到更大的集合上去，是泛函分析中的一个基本方法。当然，有意义的延拓，应该是仍旧保持原算子的一些重要特性：例如线性性、有界性、范数等等的延拓。

**7.8 定理** 令$T$：$\mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$是有界线性算子，其中$\mathscr{D}(T) \subset X$是赋范空间，$Y$是Banach空间，则有延拓

$$\widetilde{T}: \overline{\mathscr{D}(T)} \longrightarrow Y$$

这里，$\widetilde{T}$是有界线性算子，其范数$\|\widetilde{T}\| = \|T\|$。

**证** 对于任意的$x \in \overline{\mathscr{D}(T)}$，必有序列$\{x_n\} \in \mathscr{D}(T)$，使得$x_n \longrightarrow x$，显然$\{x_n\}$是Cauchy序列，亦即，对于任给的$\varepsilon > 0$，存在$N(\varepsilon) > 0$，对于一切$n$，$m > N(\varepsilon)$，有$\|x_n - x_m\| < \varepsilon / \|T\|$。由$T$的线性性，

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leqslant \|T\| \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

说明$\{Tx_n\}$是$Y$中的Cauchy序列，据假设，$Y$是完备的，所以$\{Tx_n\}$收敛，记为

$$Tx_n \longrightarrow y \in Y$$

现定义$\widetilde{T}$为$\widetilde{T}x = y$。下面证明它与$\mathscr{D}(T)$中收敛于$x$的序列

$\{x_n\}$的选择无关。假设$x_n \longrightarrow x$，且$z_n \longrightarrow x$，则$u_m \longrightarrow x$，这里$\{u_m\}$是序列（$x_1$，$z_1$，$x_2$，$z_2$，…）。根据推论7.7，序列$\{Tu_m\}$收敛，因此它的两个子序列$\{Tx_n\}$，$\{Tz_n\}$必有相同的极限，这就证明了在每一点$x \in \overline{\mathscr{D}(T)}$，算子唯一确定。

如果$x \in \mathscr{D}(T) \subset \overline{\mathscr{D}(T)}$，可在$\mathscr{D}(T)$中取$\{x_n\} = \{x\}$，则$\widetilde{T}x = Tx$，因此，$\widetilde{T}$是$T$的一个延拓。

算子$\widetilde{T}$是线性的。假设$x, x' \in \overline{\mathscr{D}(T)}$，且$\widetilde{T}x = y$，$\widetilde{T}x' = y'$，则存在着$\{x_n\}$，$\{x_n'\} \in \mathscr{D}(T)$，使得$x_n \longrightarrow x$，对于任意标量$\alpha$，$\beta$，$\mathscr{D}(T)$是线性空间，且$\overline{\mathscr{D}(T)}$是闭线性空间，于是，有$\alpha x + \beta x' \in \overline{\mathscr{D}(T)}$，$\alpha x_n + \beta x_n' \in \mathscr{D}(T)$，$\alpha x_n + \beta x_n' \longrightarrow \alpha x + \beta x'$，因此，$T(\alpha x_n + \beta x_n') = \alpha T x_n + \beta T x_n' \longrightarrow \alpha \widetilde{T} x + \beta \widetilde{T} x' = \alpha y + \beta y'$。又由极限的唯一性，推得$\widetilde{T}(\alpha x + \beta x') = \alpha T \widetilde{x} + \beta T \widetilde{x'}$。

在$\mathscr{D}(T)$中，显然有$\|Tx_n\| \leqslant \|T\| \|x_n\|$，但是，当$n \longrightarrow \infty$时，有$Tx_n \longrightarrow y = \widetilde{T}x$。同时，$\|\cdot\|$：$x \longmapsto \|x\|$是连续映射，因此，$\lim\limits_{n \to \infty} \|Tx_n\| \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} \|T\| \|x_n\|$，所以$\|\widetilde{T} x\| \leqslant \|T\| \|x\|$，故$\widetilde{T}$有界。另一方面，对于任意$0 \neq x \in \overline{\mathscr{D}(T)}$，成立着

$$\frac{\|\widetilde{T}x\|}{\|x\|} \leqslant \|T\|, \quad \text{所以} \quad \|\widetilde{T}\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|\widetilde{T}x\|}{\|x\|} \leqslant \|T\|$$

但显然有$\|\widetilde{T}\| \geqslant \|T\|$，所以$\|\widetilde{T}\| = \|T\|$。

## 习　　题

1. 如果$T \neq 0$是有界线性算子，证明：对于任意合于条件$\|x\| < 1$

的$x\in D(T)$，有严格的不等式$||Tx||<||T||$。

2. 证明如下定义的$y=(\eta_i)=Tx$，$\eta_i=\xi_i/i$，$x=(\xi_i)$的算子$T$：$l^\infty\longrightarrow l^\infty$，是线性有界的。

3. 假设$T$是从赋范空间$X$到赋范空间$Y$上的线性有界算子，如果存在正数$b$，使得

$||Tx||\geqslant b||x||$ 对一切$x\in X$成立

则 $T^{-1}$：$Y\longrightarrow X$存在且有界。

4. 令$T$：$C[0,1]\longrightarrow C[0,1]$定义成$y(t)=\int_0^t x(\tau)\,d\tau$，确定$R(T)$和$T^{-1}$：$R(T)\longrightarrow C[0,1]$，$T^{-1}$是线性有界算子吗？

5. 设$X$是$R$上全体有界实值函数作成的赋范空间，其范数定义成$||x||=\sup\limits_{t\in R}|x(t)|$，又令$T$：$X\longrightarrow X$为$y(t)=Tx(t)=x(t-\Delta)$，其中$\Delta>0$是一定常数（它也是一个电子装置的延迟线路的模型，其输出$y$是输入$x$的延迟传递，时间延迟为$\Delta$，图(3-2)。$T$是线性且有界的吗？

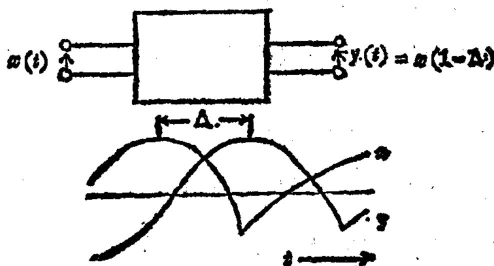



图3-2 延迟电路图示

6. 在例7.3(5°)中，取$m=n$，证明其一个相容的范数是

$$||A||=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2)^{1/2}$$

但是，当$n>1$时，这已非$R^n$中通常定义的Euclid范数。

7. 证明：有界线性算子$T$：$X\longrightarrow Y$的值域不一定是$Y$中的闭

集。

8. 在$C[0,1]$上，定义$S$和$T$分别为：

$$y(t)=t\int_0^1 x(\tau)d\tau, \qquad y(t)=tx(t)$$

算子$S$与$T$可换吗？计算$\|S\|$，$\|T\|$，$\|ST\|$和$\|TS\|$。

## §8 线性泛函

如果算子$T$的定义域是标量域$K$上线性空间$X$的子集，而值域在$K$中，则$T$：$\mathscr{D}(T)\longrightarrow K$称为泛函数。为了区分算子和泛函，泛函经常采用记号$f$，$g$，$h$，…。如果$K=C$，则称为复泛函，如果$K=R$，则又称为实泛函。

从历史上看，最早人们主要的研究对象是泛函，至于更一般的算子，则是以后才研究得更多一些，因此，本学科至今仍沿用以前的名称“泛函分析”。

**8.1 定义 线性泛函**是其定义域在线性空间$X$中，值域则在$X$的标量域$K$中的线性算子，记为$f$：$\mathscr{D}(f)\longrightarrow K$。

**8.2 定义 有界线性泛**$f$是其值域在$\mathscr{D}(f)\subset X$的标量域中的线性有界算子，因此，存在常数$M>0$，使得对于全体$x\in\mathscr{D}(f)$，都有

$$|f(x)|\leqslant M\|x\| \tag{1}$$

显然，泛函$f$的**范数**定义成

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\in D(f)\\ x\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{2}$$

或

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\in D(f)\\ \|x\|=1}}|f(x)| \tag{3}$$

因此，（1）式化为

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \tag{4}$$

当然，我们也有下述定理。

**8.3　定理**　定义域$\mathscr{D}(f)$在赋范空间里的线性泛函$f$连续当且仅当$f$有界。

**8.4　例**

（1°）**范数**　赋范空间$(x, \|\cdot\|)$上的范数$\|\cdot\|$：$X \longrightarrow R$是$X$上的一个泛函，它有界且连续，但不是线性的。读者自证。

（2°）**点积**　保持一个固定向量的二向量的点积，定义了泛函$f$：$R^3 \longrightarrow R$，取$\theta \neq a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$，对于任意的$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3$，则

$$f(x) = a \cdot x = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3$$

是一个实有界线性泛函。线性性是显然的。由Cauchy-Schwarz不等式，有

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |a \cdot x| = |\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3| \\ &\leqslant (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2)^{1/2}(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \\ &\quad |\alpha_3|^2)^{1/2} \\ &= \|x\|\|a\|\end{aligned}$$

因此，对于所有的$\theta \neq x \in R^3$，都有

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|a\|$$

所以，

$$\sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\| \leqslant \|a\|$$

另一方面，取$x = a$，则$|f(a)| = |a \cdot a| = \|a\|^2$。

于是

$$\|f\| \geqslant \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|$$

合起来有　　$\|f\| = \|a\|$。

(3°) **定积分**　$f$: $C[a,b] \longrightarrow R$，对于任意$x(t) \in C[a,b]$，$f(x) = \int_a^b x(t)dt$。此泛函是线性的并且有界。

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |x(t)|dt$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|(b-a) = \|x\|(b-a)$$

所以，对于一切$\theta \neq x \in C[a,b]$，总有

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant b-a, \quad \sup_{\substack{x(t) \in C[a,b] \\ x(t) \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\| \leqslant b-a$$

另一方面，取$x_0(t) \equiv 1$，则$x_0 \in C[a,b]$，

$$|f(x_0)| = \left|\int_a^b 1dt\right| = (b-a)$$

于是

$$\|f\| \geqslant \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = |f(x_0)| = b-a$$

总之，有$\|f\| = b-a$。

(4°) 定义泛函$f$: $C[a,b] \longrightarrow R$，$f(x) = x(t_0)$，其中$x(t) \in C[a,b]$，$t_0 \in [a,b]$是一固定点，易证$f$是有界线性泛函，且$\|f\| = 1$。

(5°) **空间$l^2$**。选定$a = (\alpha_i) \in l^2$，对于任意的$x = (\xi_i) \in l^2$，定义$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$。则$f$是有界线性泛函，对于任意$y = (\eta_i) \in l^2$，$\alpha, \beta \in K$，

$$f(\alpha x+\beta y)=\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha\xi_i+\beta\eta_i)\alpha_i=\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha\xi_i\alpha_i+\beta\eta_i\alpha_i)$$

$$=\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\alpha_i+\beta\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\alpha_i=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

同时，由Cauchy-Schwarz不等式，

$$|f(x)|=|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\alpha_i|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i||\alpha_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{1/2}$$

$$\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^2\right)^{1/2}=\|x\|\|a\|$$

另一方面，对于一切非$\theta$元$x\in l^2$，均有

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|}\leqslant\|a\|,\qquad \sup_{\substack{x\in l^2\\ x\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\|f\|\leqslant\|a\|$$

特别取$x=a=(\alpha_i)$，则$f(a)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2=\|a\|^2$，

所以 $\|f\|\geqslant\dfrac{|f(a)|}{\|a\|}=\|a\|$

于是 $\|f\|=\|a\|$

一个重要的事实是：标量域$K$上的线性空间$X$上的全体线性泛函作成一个同域上的线性空间，记为$X^*$，称为$X$的**代数对偶空间**。其上的代数运算定义成：对于任意$f$，$f_1,f_2\in X^*$和$\alpha,\beta\in K$，任一元$x\in X$，

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x);$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)。$$

| 空间 | 一般元 | 一点处的值 |
|---|---|---|
| X | $x$ | — |
| $X^*$ | $f$ | $f(x)$ |
| $X^{**}$ | $g$ | $g(f)$ |

易证在上述二运算下，$X^*$ 是一个线性空间。同时，线性空间$X^*$上的全体线性泛函作成 $X^*$ 的对偶空间$(X^*)^*=X^{**}$，称为 $X$的**第二代数对偶空间**。我们引入空间$X^{**}$，是因为它与空间$X$有着重要的联系。

设$x\in X$，$f\in X^*$，$g\in X^{**}$。泛函$f$：$f\longrightarrow K$，应理解成选定$f$，而让$x$跑遍$X$，现在换一种想法：让点$x\in X$固定，让$f$跑遍空间$X^*$，这就建立了一个从$X^*$到标量域$K$的对应：$g$：$X^*\longrightarrow K$，亦即新泛函，且有

$$g(f)=g_x(f)=f(x) \qquad (x\text{固定，}f\text{变化})$$

现在需要证明$g$仍是一个线性泛函。对于固定的 $x\in X$，任意的$f_1$，$f_2\in X^*$和$\alpha$，$\beta\in K$，

$$\begin{aligned}g_x(\alpha f_1+\beta f_2)&=(\alpha f_1+\beta f_2)\ (x)=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)\\&=\alpha g_x(f_1)+\beta g_x(f_2)\end{aligned}$$

因此，$g\in X^{**}$。

从上面的讨论得知，给了一个$x\in X$，就有$X^{**}$中的元$g_x$与之对应，这实质上就建立起一个映射

$$\begin{aligned}C:\ &X\longrightarrow X^{**}\\&x\longmapsto g_x\end{aligned}$$

映射$C$称为是线性空间$X$到它的第二代数对偶空间$X^{**}$中的**自然映射**。一般说来，$\mathscr{D}(C)=X$，而$\mathscr{R}(C)\subset X^{**}$，下面证明$C$是线性映射。对于$x,y\in X$，任意的$f\in X^*$，以及$\alpha$，$\beta\in K$，

$$\begin{aligned}C(\alpha x+\beta y)(f)&=g_{\alpha x+\beta y}(f)=f(\alpha x+\beta y)\\&=\alpha f(x)+\beta f(y)=\alpha g_x(f)+\beta g_y(f)\\&=\alpha C(x)(f)+\beta C(y)(f)\end{aligned}$$

（利用更深入的知识，可以证明$C$还是等距映射。）

这时，我们也称空间$X$通过自然映射$C$**嵌入**到空间$X^{**}$之中。为此，我们还要说明一个普遍有用的概念——**同构**。

在工作中，我们总是注意着各种各样的空间，它们都由一个集合$X$和定义在$X$上的一种或几种"结构"所组成。对于度量空间$X$来说，"度量"就是$X$中的结构。对于线性空间来说，其结构就是其上的两种代数运算。而对于赋范空间来说，两个代数运算和范数就是它的结构。

给了两个同类型的空间$X$和$Y$，我们总是关心它们是否是"本性恒同"的，就是说，这两个空间具有"完全"相同的结构，它们的区别仅仅在于集合中的点的属性不同而已。如是，那么就视空间$X$和$Y$是两个相同的抽象空间。任何时候，结构总是主要研究对象，而点的属性则是无关紧要的。这样的情形经常会出现，这就导出同构的概念：按定义，它是一个从$X$到$Y$上的双射，并且保持结构。

因此，度量空间$(X, d)$到度量空间$(Y, d')$上的**同构映射**$T$是一个等距双射。亦即，对于所有的$x_1, x_2 \in X$，$d'(Tx_1, Tx_2) = d(x_1, x_2)$，此时，亦称$X$与$Y$**同构**。

线性空间$X$到同域上的另一个线性空间$Y$上的同构映射$T$是保持线性空间两个代数运算的双射。亦即，对于任意的$x_1$，$x_2 \in X$，和标量$\alpha \in K$，有

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2, \quad T(\alpha x_1) = \alpha Tx_1$$

此时，亦称$T$为双射线性算子，$X$与$Y$是同构的线性空间。

所谓赋范空间之间的同构就是保持范数的同构线性空间。

从前面的讨论知，线性空间$X$到它的第二代数对偶空间$X^{**}$中的自然映射$C$是一个单射，并且是线性的，它也是一个$X$到$R(C) \subset X^{**}$上的同构映射。

如果$X$与线性空间的一个子空间同构，则称$X$**嵌入**$Y$中。所以，$X$嵌入$X^{**}$中，也称$C$为$X$到$X^{**}$的自然嵌入映射。

如果线性空间$X$与它的第二代数对偶空间$X^{**}$是同构的，即进一步要求自然映射$C$是满射，此时有$R(C)=X^{**}$，则称$X$是代数自反的。下一节将会看到：**有限维空间是代数自反的。**

## 习 题

1. 证明：定义在$C[a,b]$上的泛函：

$$f_1(x)=\int_a^b x(t)y_0(t)dt \qquad (y_0(t)\in C[a,b])$$

$$f_2(x)=\alpha x(a)+\beta x(b) \qquad (\alpha,\beta\text{是固定标量})$$

是线性有界泛函.

2. 计算定义在$C[-1,1]$上线性泛函的范数：

$$f(x)=\int_{-1}^0 x(t)\,dt-\int_0^1 x(t)\,dt$$

3. 证明：在任何序列空间$X$上都可以定义一个线性泛函为$f(x)=\xi_n$（$n$固定），其中$x=(\xi_i)$. 如果$X=l^\infty$，$f$是有界的吗？

4. 如果$f$是复赋范空间上的一个有界线性泛函，那么$\bar{f}$是线性有界泛函吗？（$\bar{f}$表示$f$的复共轭）.

5. 设$f\neq 0$是线性空间$X$上的任意线性泛函，$x_0$是$X-N(f)$中任一固定元，其中$N(f)$表示$f$的零空间. 证明：任意元$x\in X$都有唯一的表示$x=\alpha x_0+y$，其中$y\in N(f)$.

6. 证明：定义在同一线性空间上，并且具有相同零空间的二线性泛函$f_1\neq 0$，和$f_2\neq 0$，是成比例的.

7. 如果$Y$是线性空间$X$的一个子空间，$f$是$X$上的线性泛函，使得$f(Y)$不是整个标量域. 证明：对于所有的$y\in Y$，都有$f(y)=0$.

## §9 有限维空间中的线性算子和线性泛函

有限维空间是比较简单的线性空间和赋范空间，其空间的结构较易把握。因此，人们自然期望弄清这类空间及其对偶空间的结构，以及定义在其上的线性算子和线性泛函有较简单的性质。

通过前面的学习，我们已经知道：有限维空间中的任意线性算子都是有界的，因而是连续的。同时，线性算子与矩阵有着密切的关系：一个线性算子唯一的决定了一个矩阵；反之，一个矩阵也表示了一个线性算子。本节的任务之一，就是要找到它们之间的具体联系。

假设$X$和$Y$是同域$K$上的线性空间，$\dim X=n$，$\dim Y=r$。并设$X$的一组基为$\{e_1,\cdots,e_n\}=E$，而$Y$的一组基为$B=\{b_1,\cdots,b_r\}$，还假定这两组基均按照固定的顺序排列(编号)好。$T$：$X\longrightarrow Y$是线性算子。对于任意的$x\in X$，有

$$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k=\xi_1 e_1,+\cdots+\xi_n e_n \tag{1}$$

则$x$的象

$$y=Tx=T\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k Te_k \tag{2}$$

因为表示式（1）是唯一的，如果$X$的基向量$e_1,\cdots,e_n$给定，则线性算子$T$由$y_k=Te_k$（$k=1,2,\cdots,n$）唯一确定。

但是，$y$和$y_k=Te_k$（$k=1,2,\cdots,n$）都是$Y$中的元，它们必可唯一表成下述形式：

$$y=\sum_{i=1}^{r}\eta_i b_i \tag{3}$$

和

$$y_k=Te_k=\sum_{i=1}^{r}\tau_{ik}b_i \tag{4}$$

代入（2)式，得到

$$y=\sum_{i=1}^{r}\eta_i b_i=\sum_{k=1}^{n}\xi_k Te_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\sum_{i=1}^{r}\tau_{ik}b_i=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{n}\tau_{ik}\xi_k\right)b_i$$

于是

$$0=\sum_{i=1}^{r}\left\{\eta_i-\sum_{k=1}^{n}\tau_{ik}\xi_k\right\}b_i,$$

然而$\{b_1,b_2,\cdots,b_r\}$是线性无关集，因此，

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{n}\tau_{ik}\xi_k \quad (i=1,2\cdots,r) \tag{5}$$

上式中的系数作成一个$r\times n$矩阵

$$T_{EB}=(\tau_i^k)_{r\times n}$$

这说明，如果$X$的基$E$和$Y$的基$B$给定，并且$E$和$B$中的向量按一定顺序排列，那么矩阵$T_{EB}$就由线性算子$T$唯一决定。这时，也说矩阵$T_{EB}$表示了在这两组基下的算子$T$。

利用列向量$\tilde{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$，$\tilde{y}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)^T$，(5)式可用矩阵记号写出：

$$\tilde{y}=T_{EB}\tilde{x} \tag{6}$$

同样，（4）式亦有

$$Te = T_{EB}^{T}b \tag{7}$$

其中$Te=(Te_1,\cdots,Te_n)^{T}$，$b=B^{T}$，$T_{EB}{}^{T}$表矩阵$T_{EB}$的转置矩阵。

现在，我们来讨论空间$X$上的线性泛函。设 $\dim X=n$，$E=\{e_1, \cdots, e_n\}$是$X$的一组基，如前给定。由前节，我们知道$X$上全体线性泛函作成代数对偶空间$X^*$。则对于每一个泛函$f\in X^*$和任意的 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in X$，有

$$f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\alpha_i \tag{8}$$

其中

$$\alpha_i=f(e_i) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

这说明，线性泛函$f$的值被它在$X$中的n 个基向量处的值$\alpha_1$，$\cdots$，$\alpha_n$唯一地确定。

显然，当$f\in X^*$给定，则$\alpha_i=f(e_i)$亦给定，如果我们设$a=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，则$a$是$X$中一个固定元，这与例6.2（5°）中所定义的线性泛函是一致的。

另一方面，由（9）式，任意给定$n$个标量$\alpha_1$，$\cdots$，$\alpha_n$，必然决定了$X$中的一个线性泛函$f$。特别，取$n$组数

$$\begin{array}{c}
(1, 0, 0, \cdots, 0, 0)\\
(0, 1, 0, \cdots, 0, 0)\\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
(0, 0, 0, \cdots, 1, 0)\\
(0, 0, 0, \cdots, 0, 1)
\end{array}$$

由（9）式，它们决定了$n$个线性泛函，用$f_1$，$\cdots$，$f_n$表示，则有

$$f_k(e_i)=\delta_{ik}=\begin{cases}0, & 如果 i\neq k;\\ 1, & 如果 i=k。\end{cases} \tag{10}$$

亦即，$f_k$在第$k$个基向量$e_k$处的值为1，而在另外$n-1$个基向量处的值为0，$\delta_{ik}$称为Kronecker 记号。我们称$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$为$X$的基$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$的对偶基。

**9.1 定理** 设$X$是$n$维线性空间，$E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是$X$的一组基，则由（10）式决定的$F=\{f_1, \cdots, f_n\}$是$X$的代数对偶空间$X^*$的一组基，并且$\dim X^*=\dim X=n$。

**证** $F=\{f_1, \cdots, f_n\}$是一个线性无关集。因为对于任意$x\in X$和$n$个数$\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_n$，若

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k f_k(x)=0 \tag{11}$$

特别取$x=e_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，(11)式亦成立。于是

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k f_k(e_i)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\delta_{ik}=\beta_i=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

现在来证明任意$f\in X^*$，都可由$F$唯一表出。由(8)式，对于任意的$x\in X$，有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_i \qquad (x=(\xi_i))$$

另一方面，由（10）式

$$f_i(x)=f_i\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k f_i(e_k)=\xi_i$$

代入上式，得到

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i f_i(x)$$

利用$x$的任意性和$f_i(i=1, 2, \cdots, n)$的线性性，推得$f=\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_n f_n$。而$\dim X^*=\dim X=n$是前面证明的直接结果。

为了得到$X$是代数自反的结论，先证明下述引理。

**9.2 引理** 设$X$是$n$维线性空间，如果$x_0\in X$，对于所有的$f\in X^*$都有$f(x_0)=0$，则必有$x_0=0$。

**证** 假设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是$X$的一组基，则有

$$x_0=\sum_{i=1}^{n}\xi_{0i}e_i$$

则由(8)式，$f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\xi_{0i}\alpha_i$ (12)

由假设，对于任意$f\in X^*$，(12)皆为零，亦即，对于$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的任意一种选择，(12)式均为零。特别，选择$\alpha_1=1$，其它$\alpha_i=0$ $(i=2, 3, \cdots n)$，

$$f_1(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\xi_{0i}\alpha_i=\xi_{01}=0$$

又选择$\alpha_2=1$其它$\alpha_i=0$ $(i=1, 3, \cdots, n)$，则有

$$f_2(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\xi_{0i}\alpha_i=\xi_{02}=0$$

如此下去，必得到$\xi_{01}=\xi_{02}=\cdots=\xi_{0n}=0$，所以$x_0=0$。

**9.3 定理** 有限维线性空间是代数自反的。

**证** 考虑自然映射$C: X\longrightarrow X^{**}$，前面已证是线性映射。对于$x_0\in X$，如果$C(x_0)=0$，意味着对于任意的$f\in X^*$，都有

$$Cx_0(f)=g_{x_0}(f)=f(x_0)=0$$

由引理9.2，必有$x_0=0$。又由定理6.4(Ⅰ)，推得自然映射有逆映射$C^{-1}: \mathscr{R}(C)\longrightarrow X$存在，再根据定理6.4(Ⅱ)知$C^{-1}$是

线性算子，并且由（Ⅲ），蕴含着$\dim \mathscr{R}(C)=\dim X$，从定理9.1，$\dim X^{**}=\dim X^{*}=\dim X$，合起来必有$\dim R(c)=\dim X^{**}$，但是$\mathscr{R}(c)\subset X^{**}$，且$\mathscr{R}(c)$是线性空间，于是$\mathscr{R}(c)=X^{**}$，因此，自然映射$C$：$X \longrightarrow X^{**}$是同构映射。

注意：对于无穷维线性空间，自然映射未必有这样好的性质，证明亦困难一些。

## 习　题

1．求出由矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$表示的线性算子$T$：$R^3 \longrightarrow R^2$的零空间。

2．求出$R^3$中一组基{$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$}的对偶基。

3．设$\{f_1,f_2,f_3\}$是$R^3$中基$\{e_1,e_2,e_3\}$的对偶基，其中$e_1=(1,1,1)$，$e_2=(1,1,-1)$，$e_3=(1,-1,-1)$，求出$\{f_1,f_2,f_3\}$和$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，其中$x=(1,1,0)$。

4．如果$f$是$n$维线性空间$X$上的线性泛函，则其零空间$N(f)$的维数是什么？

5．求出$R^3$上泛函$f(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3$零空间的基，其中$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$。如果考虑泛函$f_1(x)=\xi_1+\xi_2-\xi_3$，有什么样的结果呢？

6．如果$x$和$y$是有限维线性空间$X$中两个不同的向量，则在$X$上存在着一个线性泛函$f$，使得$f(x)\neq f(y)$。

7．（线性延拓）设$Z$是$n$维线性空间$X$的一个真子空间，$f$是$Z$上的线性泛函，证明$f$可以线性延拓到$X$上，亦即，存在着$X$上的线性泛函$F$，使得$F|_Z=f$。

8．设$Z\subset R^3$是$\xi_2=0$的子空间，$f$是$Z$上的线性泛函，定义成$f(x)=(\xi_1-\xi_2)/2$，将$f$线性延拓到$R^3$，求此泛函$F$，使得$F(x_0)=M$（给定常数），其中$x_0=(1,1,1)$。$F$是唯一的吗？

## §10 算子赋范空间、对偶空间

假设$X=(X,\|\cdot\|)$ 和$Y=(Y,\|\cdot\|)$ 是同域$K$上的两个赋范空间（这里两个不同的范数使用了相同的记号），从$X$到$Y$中全体有界线性算子作成的集合用$B(X,Y)$ 表示。我们当然期望它是一个赋范空间。

对于任意的$T$，$T_1$，$T_2\in B(X,Y)$，以及任意的元 $x\in X$，标量$\alpha\in K$，按自然方式定义算子加法和标量乘法为

$$(T_1+T_2)(x)=T_1x+T_2x,$$

$$(\alpha T)(x)=\alpha Tx。$$

另一方面，$T$的范数可定义成

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}\|Tx\| \tag{1}$$

容易证明

**10.1 定理** $B(X,Y)$ 是赋范空间。

**10.2 定理** 如果$Y$是Banach空间，则$B(X,Y)$ 也是Banach空间。

**证** 假设算子序列$\{T_n\}\in B(X,Y)$ 是任意Cauchy序列，则对于任给的$\varepsilon>0$，存在着$N(\varepsilon)>0$，使得对于所有的$n,m>N(\varepsilon)$，都有

$$\|T_n-T_m\|<\varepsilon$$

任取$x\in X$，当$n,m>N(\varepsilon)$ 时，

$$\|T_nx-T_mx\|=\|(T_n-T_m)x\|\leqslant\|T_n-T_m\|\|x\|<\varepsilon\|x\| \tag{2}$$

对于任意固定的$x$和任给的$\tilde{\varepsilon}$，取$\varepsilon=\varepsilon_x$，使得$\varepsilon\|x\|=\varepsilon_x\|x\|<$

$\tilde{\varepsilon}$，则(2)式化为$\|T_n x - T_m x\| < \tilde{\varepsilon}$，这说明$(T_n x) \in Y$是$Y$中的Cauchy序列，依假设$Y$是Banach空间，故$(T_n x)$必收敛于$Y$中的元，记为$y$，则

$$T_n x \longrightarrow y \in Y, \quad \text{或} \lim_{n\to\infty} T_n x = y$$

显然此极限依赖于$x$的选择，不同的$x \in X$，一般来说，就有极限$y \in Y$与之对应，这就决定了一个映射$T: X \longrightarrow Y$，或$Tx = y$。现在证明$T \in B(X,Y)$。$T$是线性的，因为对于所有的$x, \tilde{x} \in X$和任意的$\alpha, \beta \in K$，有

$$T(\alpha x + \beta \tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta \tilde{x}) = \lim_{n\to\infty}(\alpha T_n x + \beta T_n \tilde{x})$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \beta \lim_{n\to\infty} T_n \tilde{x} = \alpha T x + \beta T \tilde{x}$$

$T$是有界的，因为对于前给的$\varepsilon > 0$，当$n, m > N(\varepsilon)$时，有

$$\big|\|T_n\| - \|T_m\|\big| \leqslant \|T_n - T_m\| < \varepsilon$$

所以$\{\|T_n\|\} \in R$是Cauchy序列，由$R$的完备性，数列$\{\|T_n\|\}$在$R$中收敛，因此它必有界，可设$\|T_n\| < M$ $(M > 0)$ $(n = 1, 2, \cdots)$，但是，对于$x \in X$，

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|$$

$$\leqslant (\lim_{n\to\infty} \|T_n\|)\|x\| \leqslant M\|x\|$$

推得

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant M$$

于是，$T \in B(X,Y)$。

最后证明$\{T_n\}$依范数收敛于$T$。由（2）式，令$m \longrightarrow \infty$

时，得到

$$\|T_n x - Tx\| = \|T_n x - \lim_{m\to\infty} T_m x\| = \lim_{m\to\infty}\|T_n x - T_m x\|$$

$$\leqslant \varepsilon\|x\| \tag{3}$$

对一切$x\in X$成立（当$n>N$时），所以

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|(T_n - T)x\|}{\|x\|} = \|T_n - T\| \leqslant \varepsilon$$

于是$\|T_n - T\|\longrightarrow 0$，即$\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$。又由$\{T_n\}\in B(X,Y)$选择的任意性，$B(X,Y)$完备。

如果把上节的讨论全部移植到赋范空间$X$上，便得以下定义。

**10.3 定义** 设$X$是赋范空间，则$X$上全体有界线性泛函作成的集合，构成一个赋范空间，称为$X$的**对偶空间**（或称**共轭空间**），记为$X'$。

由定理10.2，显然有下述定理。

**10.4 定理** $X'$是Banach空间。

任何赋范空间$X$的对偶空间$X'$都是Banach空间，这是一个极好的性质。因此，泛函分析中，总是将空间$X$与$X'$联系起来进行研究，往往利用同构映射，将$X$的研究转化到空间$B(X,Y)$或$X'$上进行讨论，这是泛函分析的一个基本方法。

赋范空间$X$到赋范空间$Y$上的同构映射是一个双线性算子$T:X\to Y$，并且保持范数，亦即，对于所有的$x\in X$，有$\|Tx\| = \|x\|$。如是，则称$X$与$Y$是同构的赋范空间，简称空间$X$与$Y$同构。同构的两个赋范空间，我们不认为它们不相同，因此常用等号连结它们。下例中，可以看到，$R^n$的对偶空间与

$R^n$同构，这时，就简便地认为$R^n$的对偶空间就是$R^n$。以后，我们都采用这样一种观点。

**10.5 空间$R^n$的对偶空间是$R^n$**

**证** 根据定理7.4，有 $(R^n)' = (R^n)^*$，又据上节讨论，每一个$f\in(R^n)^*$，都有表示

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\alpha_k,\qquad \text{这里}\alpha_k=f(e_k)。$$

由Cauchy-Schwarz不等式，

$$|f(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\xi_k\alpha_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{1/2}=\|x\|\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{1/2}$$

因此，

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\in R^n\\ \|x\|=1}}|f(x)|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{1/2}$$

另一方面，取$x_0=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$，则

$$|f(x_0)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right|=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{1/2}$$

所以

$$\|f\|\geqslant\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{1/2}}=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{1/2}$$

$$=\|x_0\|$$

合起来，有

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} f^2(e_k)\right)^{1/2} = \|x_0\|$$

说明$f$的范数就是$R^n$中的范数。

作映射$T$：$(R^n)' \longrightarrow R^n, T$：$f \longmapsto x_0 = (\alpha_k)$，其中$\alpha_k = f(e_k)$　$(k = 1, 2\cdots, n)$，易证它是保范、线性的双射，因此$T$是同构映射。于是$(R^n)'$与$R^n$同构。

**10.6　空间$l^1$的对偶空间是$l^\infty$**

**证**　取$l^1$的Schauder基为$(e_k)$，这里$e_k = (\delta_{kj})$，即只有第$k$个分量是1，其余的分量皆为零。对于每一个$x \in l^1$，有唯一的表示

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \tag{4}$$

考虑$f \in (l^1)'$，其中$(l^1)'$表示空间$l^1$的对偶空间。因为$f$线性有界，则

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \alpha_k, \qquad \alpha_k = f(e_k) \tag{5}$$

这里，数$\alpha_k = f(e_k)$由$f$唯一确定。然而$\|e_k\| = 1$，于是

$$|\alpha_k| = |f(e_k)| \leqslant \|f\|\|e_k\| = \|f\|$$

因此$\sup\limits_k |\alpha_k| \leqslant \|f\|$　　(6)

说明$(\alpha_k) \in l^\infty$。另一方面，对于每个$b = (\beta_k) \in l^\infty$，我们可以得到$l^1$上的一个相应的有界线性泛函。实际上，可以定义泛函

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k$$

其中$x = (\xi_k) \in l^1$，显然$g$是线性的，又

$$|g(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k\beta_k|\leqslant\sup_{1\leqslant i\leqslant\infty}|\beta_i|\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|=\|x\|\sup_{1\leqslant i\leqslant\infty}|\beta_i|$$

所以，$g$也是有界的，于是$g\in(l^1)'$

最后证明$f$的范数即$l^\infty$中的范数。因为

$$|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\alpha_k\right|\leqslant\sup_i|\alpha_i|\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|=\|x\|\sup_i|\alpha_i|$$

所以

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\in l^1\\ x\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|x\|}\leqslant\sup_{1\leqslant i\leqslant\infty}|\alpha_i|$$

与（6）式合起来，得到

$$\|f\|=\sup_i|\alpha_i| \tag{7}$$

（7）式决定的显然是$l^\infty$中的范数。

令$x_0=(\alpha_i)\in l^\infty$，于是有$\|f\|=\|x_0\|_\infty$，这也说明了映射$T$：$(l^1)'\longrightarrow l^\infty$或$T$：$f\longmapsto x_0=(\alpha_i)$是双线性保范映射因而是同构映射，所以$(l^1)'$与$l^\infty$同构，也写成$(l^1)'=l^\infty$。

**10.7 空间$l^p$的对偶空间是$l^q$**，这里$1<p<+\infty$，$q$是$p$的共轭数，满足关系$1/p+1/q=1$。

**证** 取$l^p$的一组Schauder基为$(e_k)$，$e_k=(\delta_{ki})$，则对于任意的$x=(\xi_k)\in l^p$有唯一的表示

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_ke_k \tag{8}$$

考虑任一个$f\in(l^p)'$，因为$f$是线性有界的，有

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_kf(e_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\alpha_k \tag{9}$$

令$x_n=(\xi_k^{(n)})$，其中

$$\xi_k^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{|a_k|^q}{a_k}, & \text{若}k\leqslant n,\ \text{且}a_k\neq 0\,;\\ 0\quad, & \text{若}k>n,\ \text{或}a_k=0\,。\end{cases} \tag{10}$$

代入（9）式，得到

$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}a_k=\sum_{k=2}^{n}|a_k|^q$$

利用（10）式及关系$(q-1)p=q$，还有

$$f(x_n)\leqslant\|f\|\|x_n\|\leqslant\|f\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(n)}|^p\right)^{1/p}$$

$$=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^{(q-1)p}\right)^{1/p}$$

$$=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{1/p}$$

合起来，蕴含

$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\leqslant\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{1/p}$$

用最后一个因子去除上不等式两端，又由$1-1/p=1/q$，所以有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{1-1/p}=\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\|$$

上式对于任意$n$成立，令$n\longrightarrow\infty$，推得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\| \tag{11}$$

说明 $(\alpha_k)\in l^q$。

另一方面，对任意的$b=(\beta_k)\in l^q$，可以得到$l^p$空间上一个相应的有界线性泛函$g$，实际上，可以在$l^p$上定义

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\beta_k,\quad 其中x=(\xi_k)\in l^p$$

显然$g$是线性的。又由Hölder不等式知它是有界的。因为

$$|g(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\beta_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k\beta_k|$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|^q\right)^{1/q}$$

$$=\|x\|_p\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|^q\right)^{1/q}=\|x\|_p\|b\|_q<+\infty$$

因此，

$$\|g\|=\sup_{\substack{x\in l^p\\ x\neq 0}}\frac{|g(x)|}{\|x\|}\leqslant\|b\|_q$$

所以$g\in(l^p)'$。

最后证明$f$的范数即空间$l^q$的范数。从 (9) 式和 Hölder 不等式，得到

$$|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\alpha_k\right|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^q\right)^{1/q}$$

$$=\|x\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^q\right)^{1/q}$$

所以，

$$\|f\| \leqslant \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \right)^{1/q}$$

再使用（11）式，必有

$$\|f\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \right)^{1/q} \tag{12}$$

同理，令$c = (a_k) = (f(e_k))$，则$\|f\| = \|c\|_q$。易知映射$T: (l^p)' \longrightarrow l^q$，或$T: f \longmapsto c$是双线性映射，又从（12）式，看出$T$还是保范的，因而$T$是同构映射。

## 习　题

1．设$f$和$g$是其定义域在赋范空间$X$中的两个有界线性泛函，则对于任意非零标量$\alpha$和$\beta$，证明线性组合$h=\alpha f+\beta g$是其定义域为$D(h)=D(f)\cap D(g)$的有界线性泛函。

2．假设$X$和$Y$都是赋范空间，$T_n: X \longrightarrow Y$（$n=1, 2\cdots$）是有界线性算子序列。证明收敛$T_n \longrightarrow T$蕴含着对于任给的$\varepsilon>0$，存在着$N>0$，使得对于全体$n>N$和任意给定的闭球中的$x$，总有$\|T_n x - Tx\| < \varepsilon$。

3．如果$X$是$n$个有序实数组为元作成的空间，设$\|x\| = \max|\xi_i|$，这里$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$，则对偶空间$X'$中的对应范数是什么？

4．证明：线性空间$X$上的线性泛函，其值由$X$的Hamel基唯一决定。

5．若$X$是赋范空间，$\dim X=\infty$，证明对偶空间$X'$不恒同于代数对偶空间$X^*$。

6．（零化因子）设$A\neq\phi$是赋范空间$X$的任意子集，在$A$上处处为零的全体有界线性泛函的集合称为$A$的零化因子，记为$A^a$。证明$A^a$是对偶空间$X'$的一个闭线性子空间。什么是$X^a$和$\{0\}^a$？

7．设$A=\{(1, 0, -1), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\}\subseteq R^3$，求出$A^a$的基。

## §11 赋范空间基本定理简介

数学本身及其应用中的许多问题都归结为赋范空间中有界线性泛函是否存在，这对泛函分析的理论本身是十分重要的，而Hahn-Banach关于线性泛函的保范延拓定理完满地回答了这一问题。它与一致有界定理、有界逆算子定理与闭图象定理一起构成了赋范空间和Banach空间理论最辉煌的部份，同时，它们在应用中的巨大作用愈来愈显示出来。这里，仅对这些定理作一个简要的介绍。但是，因为某些定理涉及到更深入的数学知识，其证明将略去。

**11.1 定理** (Hahn-Banach)　设$X$是赋范空间，$Y\subset X$是其子空间，$f$是$Y$上的一个有界线性泛函，则必存在$X$上的有界线性泛函$F$，使得对于所有的$x\in Y$，都有$F|_Y=f$，且$\|F\|_X=\|f\|_Y$。

**证**　我们仅对于可分的赋范空间$X$给出证明。需要指出的是，本定理对于不可分的赋范空间仍成立。

假设$Y\neq X$，则必有$x_0\in X-Y$，作包含$x_0$和$Y$的最小线性子空间$Y_1=\{Y+x_0\}$，则$Y_1$的任意元均可唯一地表成

$$y=tx_0+x$$

其中$x\in Y$，$t$是标量。事实上，如果结论不成立，元$y$可表示为

$$y=t_1x_0+x_1,\quad y=t_2x_0+x_2$$

其中$x_1$，$x_2\in Y$，$t_1$，$t_2$都是标量。则有

$$t_1x_0+x_1=t_2x_0+x_2$$

亦即　$x_1-x_2=(t_2-t_1)x_0$

若$t_1\neq t_2$，得到

$$x_0 = \frac{x_1 - x_2}{t_2 - t_1} \in Y$$

这与$x_0 \in X - Y$的假设矛盾。于是，$t_1 = t_2$，从而$x_1 = x_2$，故表示式唯一。

现在，我们首先把泛函$f$延拓到$Y_1$上去。如果所求的泛函$F_1$存在，则有

$$F_1(y) = tF_1(x_0) + f(x) = f(x) - Ct \tag{1}$$

其中$-F(x_0) = C$，要想在延拓中不增加泛函数的范数，则必须找出这样的$C$，使之满足不等式

$$|f(x) - Ct| \leqslant \|f\| \|x + tx_0\| \tag{2}$$

亦即

$$-\|f\| \|x + tx_0\| \leqslant f(x) - Ct \leqslant \|f\| \|x + tx_0\|$$

或者

$$f(x) + \|f\| \|x + tx_0\| \geqslant Ct \geqslant f(x) - \|f\| \|x + tx_0\|$$

令$z = x/t$，则$z \in Y$，于是所求的数$C$应对一切$z \in Y$满足条件

$$f(z) + \|f\| \|z + x_0\| \geqslant C \geqslant f(z) - \|f\| \|z + x_0\| \tag{3}$$

适合（3）式的常数$C$总是存在的。事实上，任取$z_1$，$z_2 \in Y$，则

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_2) = f(z_1 - z_2) &\leqslant \|f\| \|z_1 - z_2\| \\ &= \|f\| \|z_1 + x_0 - (z_2 + x_0)\| \\ &\leqslant \|f\| \|z_1 + x_0\| + \|f\| \|z_2 + x_0\| \end{aligned}$$

因此，有

$$f(z_2) + \|f\| \|z_2 + x_0\| \geqslant f(z_1) - \|f\| \|z_1 + x_0\| \tag{4}$$

设 $$C_1 = \inf_{z \in Y} \{f(z) + \|f\| \|z + x_0\|\}$$

$$C_2 = \sup_{z \in Y} \{f(z) - \|f\| \|z + x_0\|\},$$

则由（4）式知

$$C_2 \leqslant C_1$$

任取一个数$C$，使之$C_2 \leqslant C \leqslant C_1$，则此数$C$即为所求。于是，对于$Y_1=\{Y+x_0\}$中的元$y=tx_0+x$（$x \in Y$），得到有界线性泛函

$$F_1(y)=f(x)-Ct \qquad 且 \quad \|F_1\|=\|f\|$$

因为$X$可分，必有$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}=M \subset X$，并且$\overline{M}=X$，现在仿照上述作法，逐步作出$X$的线性子空间

$$Y_1=\{Y+x_0\}$$

$$Y_2=\{Y_1+x_1\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_{n+1}=\{Y_n+x_n\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

并在这些子空间上逐步延拓泛函：在$Y_n$上构造泛函$F_n$，使之在$Y_{n-1}$上与$F_{n-1}$重合，且范数与$\|f\|$相等。如此，可以得到一个定义在$X$的一个稠集$G$上的泛函$F$。对于其它点，如$x \in X$，存在着$\{x_n\} \in G$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$，则令$F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n)$。由于

$$|F(x)|=\lim_{n\to\infty}|F(x_n)| \leqslant \lim_{n\to\infty}\|F\|\|x_n\|=\|F\|\|x\|$$

因此，$\|F\|_Y=\|f\|_Y$

**11.2 推论** 假设$X$是赋范空间，$x_0 \neq \theta$是$X$的任意元，则存在$X$上的有界线性泛函$F$，使得

$$\|F\|=1, \quad F(x_0)=\|x_0\|$$

**证** 令$Y=\{x \in X \mid_{x=\alpha x_0,\ \alpha是标量}\}$，则$Y$是$X$的线性子空间。在$Y$上定义线性泛函

$$f(x)=f(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\| \tag{5}$$

因为

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|x\|$$

于是$\|f\| = 1$，$f$有界。由Hahn–Banach定理11.1，可将$f$保范延拓到整个空间$X$上，即存在$X$上的有 线性泛函$F$，使得$\|F\| = \|f\| = 1$。又由（5）式，显然有

$$F(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$$

从推论11.2容易看出，赋范空间$X$上有许多有界线性泛函存在。

**11.3 推论** 对于赋范空间$X$中的每一个元$x$，都有

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \tag{6}$$

因此，如果对于全体$f \in X'$，存在$x_0 \in X$，使得$f(x_0) = 0$，则$x_0 = 0$。

**证** 将推论11.2中的$x_0$代之以$x$，即得

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geqslant \frac{|F(x)|}{\|F\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|$$

另一方面，利用关系$|f(x)| \leqslant \|f\| \|x\|$，推得

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leqslant \|x\|$$

**11.4 定理（Riesz）（$C[a,b]$上的泛函表示）：空间$C[a,b]$上的每一个有界线性泛函$f$均可用Riemann-Stieltjes积分

$$f(x) = \int_a^b x(t) dw(t) \tag{7}$$

表示，其中$x \in C[a,b]$，$w \in V[a,b]$，并且有全变差

$$Var(w) = \|f\| \tag{8}$$

**证** 用$B[a,b]$表示区间$[a,b]$上全体有界函数作成的赋

范空间，其范数为$\|x\|=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|$，由Hahn-Banach定理11.1，泛函$f$有延拓$F$，这里$F$是$B[a,b]$上的有界线性泛函，且

$$\|F\|=\|f\|$$

为了得到表示（7），必须定义有界变差函数$w$。为此，作函数$x_t$，在区间$[a,t]$上，$x_t=1$，在$[t,b]$上$x_t=0$（图3-3），显然$x_t\in B[a,b]$；我们称$x_t$为区间$[a,t]$的特征函数，利用$x_t$和$F$，定义

$$w(a)=0,\quad w(t)=F(x_t),\quad t\in(a,b)$$

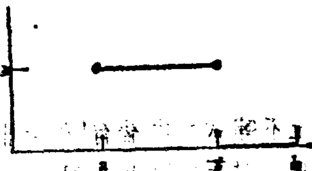


图3-3　$x_t$函数图示

现在来证明$w(t)$是有界变差函数，且$\mathrm{Var}(w)\leqslant\|f\|$。

大家知道，每个复数$\zeta$都可表成极式，令$\theta=\arg\zeta$，则

$$\zeta=|\zeta|e(\zeta),\qquad 其中 e(\zeta)=\begin{cases}1, & 当\zeta=0时;\\ e^{i\theta}, & 当\zeta\neq 0时。\end{cases}$$

若$\zeta\neq 0$，则$|\zeta|=\zeta/e^{i\theta}=\zeta e^{-i\theta}$，因此，对于任意$\zeta$，均有

$$|\zeta|=\zeta\overline{e(\zeta)} \tag{9}$$

对于分法$P_n$：

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b \tag{10}$$

为简便计，记

$$\varepsilon_i=\overline{e(w(t_i)-w(t_{i-1}))}$$

和$x_{t_i}=x_i$，这样作是为了避免下标重叠。由（9）式，得到

$$\sum_{i=1}^{n}\left|w(t_i)-w(t_{i-1})\right| = \left|F(x_1)\right| + \sum_{i=2}^{n}\left|F(x_i)-F(x_{i-1})\right|$$

$$=\varepsilon_1 F(x_1)+\sum_{i=2}^{n}\varepsilon_i[F(x_i)-F(x_{i-1})]$$

$$=F\left(\varepsilon_1 x_1+\sum_{i=2}^{n}\varepsilon_i[x_i-x_{i-1}]\right)$$

$$\leqslant\|F\|\|\varepsilon_1 x_1+\sum_{i=2}^{n}\varepsilon_i(x_i-x_{i-1})\|$$

上不等式的右端有$\|F\|=\|f\|$，又因为$|\varepsilon_i|=1$，及$x_i$的定义知，对于$t\in[a,b]$，项$x_1$，$x_2-x_1$，…，$x_n-x_{n-1}$中只有一项非零，且其范数为1。因此，因子$\|\cdots\cdots\|=1$，对不等式的左端$[a,b]$上的全体分法取上确界，推得

$$\mathrm{Var}(w)\leqslant\|f\| \tag{11}$$

所以，$w$是区间$[a,b]$上的有界变差函数。

下面证明（7）式，其中$x\in C[a,b]$，对于形如（10）的每一个分法$P_n$，定义函数$z_n$（应是$z(p_n)$），它依赖于$P_n$而不是$n$：

$$z_n=x(t_0)x_1+\sum_{i=2}^{n}x(t_{i-1})(x_i-x_{i-1}) \tag{12}$$

则$z_n\in B[a,b]$，由$w$的定义知

$$F(z_n)=x(t_0)F(x_1)+\sum_{i=2}^{n}x(t_{i-1})[F(x_i)-F(x_{i-1})]$$

$$=x(t_0)w(t_1)+\sum_{i=2}^{n}x(t_{i-1})[w(t_i)-w(t_{i-1})]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x(t_{i-1})[w(t_i)-w(t_{i-1})] \tag{13}$$

这里，最后一个等式利用了结果$w(t_0)=w(a)=0$，选择区间$[a,b]$上分划序列$(P_n)$使得$\eta(P_n)\longrightarrow 0$，$(n\longrightarrow\infty)$，(13)式右端的和式趋于(7)式中的积分。如果我们有$F(z_n)\longrightarrow F(x)$，因而等于$f(x)$，这里$x\in C[a,b]$，就得到(7)式。

现在证明$F(z_n)\longrightarrow F(x)$。注意到$x_t$的定义，由于在$t=a$处，(12)式中的和为0，则(12)式蕴含着$z_n(a)=x(a)\cdot 1$，于是$z_n(a)-x(a)=0$，再用(12)式，如果$t_{i-1}<t\leqslant t_i$，得到$z_n(t)=x(t_{i-1})\cdot 1$，因此，对于这些$t$，

$$|z_n(t)-x(t)|=|x(t_{i-1})-x(t)|$$

于是，当$\eta(P_n)\longrightarrow 0$时，$\|z_n-x\|\longrightarrow 0$，又因为$x$在$[a,b]$上连续，必在$[a,b]$一致连续。现在由$F$的连续性，蕴含$F(z)\longrightarrow F(x)$，并且$F(x)=f(x)$，即得(7)式。

最后，从(7)式以及下面结果：

$$\left|\int_a^b x(t)dw(t)\right|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\,\mathrm{Var}(w)=\|x\|\mathrm{Var}(w),\tag{14}$$

我们有

$$|f(x)|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\,\mathrm{Var}(w)=\|x\|\mathrm{Var}(w)$$

对非零的$x(t)$取上确界，即得

$$\sup_{\substack{x\in C[a,b]\\ x\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\|f\|\leqslant\mathrm{Var}(w),\tag{15}$$

再利用(11)式，推得(8)式。

值得注意的是：在定理11.4中，$w$并不唯一。但在附加所谓正规化条件：在$t=a$处，$w$为0，且在任一点$t\in(a,b)$处，$w$右连续，亦即

$$w(a)=0,\ w(t+0)=w(t)\qquad (a<t<b)$$

之后，$w$就是唯一的了。

**11.5 一致有界定理** 假设 $(T_n)$ 是 Banach 空间$X$到赋范空间$Y$里的有界线性算子序列，使得对于任意的$x\in X$，$\{\|T_nx\|\}$有界，亦即

$$\|T_nx\|\leqslant C_x\ (n=1,2,\cdots)$$

其中$C_x$是实数，则范数序列$\|T_n\|$有界，即存在常数$M$，使得

$$\|T_n\|\leqslant M\ (n=1,2\cdots)$$

证明从略。

大家知道，连续映射是开集的逆象仍是开集的映射。我们这里要引入的是开集的象仍是开集的所谓开映射。因为开集在空间的理论中扮演着重要角色，因此下面要讨论的开映射定理与Hahn-Banach关于有界线性泛函延拓定理，一致有界定理一起构成泛函分析中的基本定理。

**11.6 定义** 设X和Y都是度量空间，则称$T:\ \mathscr{D}(T)\to Y$，$\mathscr{D}(T)\subset X$为**开映射**，如果$\mathscr{D}(T)$中每一个开集的象亦是Y中的开集。

注意：在上述定义中，如果$T$不是满射，那么应该区分$T$是$\mathscr{D}(T)$到Y中的映射或是从$\mathscr{D}(T)$到值域$\mathscr{R}(T)\subset Y$上的映射两种情形。

**11.7 开映射、有界逆定理** 从Banach空间X到Banach空间Y上的有界线性算子$T$必是开映射。如果$T$还是双射，则$T^{-1}$必是连续因而是有界的。

**11.8 定义** 设X和Y都是赋范空间，$T:\ \mathscr{D}(T)\longrightarrow Y$是线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$，称$T$是**闭算子**，如果它的图像

$$G(T)=\{(x,y)\mid_{x\in D(T),\,y=Tx}\}$$

是赋范空间$X\times Y$中的闭集。空间$X\times Y$中的两种代数运算定

义为

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{16}$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \quad (\alpha\text{是标量})$$

其范数为

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \tag{17}$$

**11.8 闭图象定理** 设$X$和$Y$是Banach空间，$T: \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$是一个闭线性算子，其中$\mathscr{D}(T) \subset X$，如果$\mathscr{D}(T)$是$X$中的闭集，则$T$必有界。

**证** 首先，我们来证明乘积空间$X \times Y$在（17）定义的范数之下是完备的。设$\{z_n\}$是$X \times Y$中的任意Cauchy序列，其中$z_n = (x_n, y_n)$，则对于任给的$\varepsilon > 0$，存在$N(\varepsilon) > 0$，使得当$m, n > N(\varepsilon)$时，有

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \varepsilon \tag{18}$$

于是$\{x_n\}$，$\{y_n\}$分别是$X$和$Y$中的Cauchy序列，由$X$和$Y$的完备性，必有$x \in X$和$y \in Y$，使得$x_n \longrightarrow x$，$y_n \longrightarrow y$。令$z = (x, y)$，由（18）式，当$n > N(\varepsilon)$时，$m \longrightarrow \infty$，有$\|z_n - z\| < \varepsilon$，再由$\{z_n\}$的任意性，空间$X \times Y$是完备的。

由假设，$G(T)$是$X \times Y$中的闭集，并且$\mathscr{D}(T)$是$X$中的闭集，所以$G(T)$和$\mathscr{D}(T)$都是完备的，作映射

$$P: G(T) \longrightarrow \mathscr{D}(T)$$

$$(x, Tx) \longmapsto x$$

显然$P$是线性的；又因为

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\| \leqslant \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|$$

故$P$亦是有界的。$P$还是双射。实际上，其逆映射为

$$P^{-1}: \mathscr{D}(T) \longrightarrow G(T)$$

$$x \longmapsto (x, Tx)$$

又知$G(T)$和$\mathscr{D}(T)$皆完备，由有界逆定理11.7知，$P^{-1}$有界，

亦即$\|(x,Tx)\|\leqslant M\|x\|$，其中$M$是一定常数。同时，注意到对于所有的$x\in\mathscr{D}(T)$，都有

$$\|Tx\|\leqslant\|Tx\|+\|x\|=\|(x,Tx)\|\leqslant M\|x\|$$

于是，$T$有界。

假设$X$是已知赋范空间，$X'$是它的对偶空间，$X''$是它的第二对偶空间（或二次对偶空间）。对于固定的$x\in X$，我们定义$X'$上的泛函$g_x$为

$$g_x(f)=f(x)\qquad (f\in X'\text{是变量})\tag{19}$$

则有下述引理。

**11.10 引理** 在赋范空间$X$中，对于每一个元$x\in X$，由（19）式定义的泛函$g_x$是$X'$上的有界线性泛函，亦即$g_x\in X''$，并且其范数

$$\|g_x\|=\|x\|\tag{20}$$

**证** 由§8，$g_x$显然是线性的。而（20）式直接从（19）式和推论11.3得到：

$$\|g_x\|=\sup_{\substack{f\in X'\\ f\neq 0}}\frac{|g_x(f)|}{\|f\|}=\sup_{\substack{f\in X'\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|}=\|x\|$$

## 习 题

1. 证明：如果对于赋范空间$X$上的任意有界线性泛函$f$，都有$f(x)=f(y)$，则$x=y$。

2. 取$X=R^2$，求出定理11.1中的$F$。

3. 证明：在定理11.1的条件下，必存在$F\in X'$，使得$\|F\|=\|(X_0)\|^{-1}$且$F(x_0)=1$。

4. 假设$X$是赋范空间，$x_0\in X$，对于全体$f\in X'$，$\|f\|=1$，都有$|f(x_0)|\leqslant C$，则$\|x_0\|\leqslant C$。

5. 证明：$T$：$R^2\to R$定义成$(\xi_1,\xi_2)\to(\xi_1)$是开映射。而映射$V$：$R^2\to R$定义成$(\xi_1,\xi_2)\to(\xi_1,0)$是一个开映射吗？

6． 设$X$是赋范空间，其元是复序列$x=(\xi_i)$，其分量只有有限多个非零。定义范数为$x=\sup\limits_i|\xi_i|$，映射$T$：$X\to X$为

$$Y=Tx=\left(\xi_1,\ \frac{1}{2}\xi_2,\ \frac{1}{3}\xi_3,\ \cdots\right)$$

证明T是线性有界的，但$T^{-1}$无界．

7．设$T$：$X\to Y$是有界线性算子，其中$X$和$Y$都是Banach空间，如果$T$是双射，证明存在着正实数$a$，$b$，使得对于一切$x\in X$，有

$$a\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant b\|x\|$$

8． 如果闭线性算子的逆算子$T^{-1}$存在，证明$T^{-1}$亦是闭线性算子．

9． 设$T$是闭线性算子，$D(T)$中的两个序列$\{\tilde{x}_n\}$，$\{\bar{x}_n\}$均收敛于相同的极限$x$，又如果$\{T\tilde{x}_n\}$，$\{T\tilde{x}_n\}$都就敛，证明$\{T\tilde{x}_n\}$和$\{T\bar{x}_n\}$有相同的极限$Tx$。

10． 证明闭线性算子$T$：$X\to Y$的零空间$N(T)$是$X$中的闭子空间．

11． 假设$X$和$Y$都是赋范空间，且$X$紧，$T$：$X\to Y$是双射闭线性算子，证明$T^{-1}$有界

## §12 强收敛与弱收敛

在微积分中，根据不同的条件，定义了多种收敛性。例如：条件收敛、绝对收敛、一致收敛、逐点收敛等等。在泛函分析中亦有类似的情形。我们现在要引入的赋范空间中点列的弱收敛的概念，在赋范空间线性算子理论之中有着重要作用。

**12.1 定义** 赋范空间$X$中的点列$\{x_n\}$称为是**强收敛**（或依范数收敛）的，如果存在着元$x\in X$，成立着

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$$

这时，亦写作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

或简记为

$$x_n \longrightarrow x \qquad (n\to\infty)$$

称$x$为点列$\{x_n\}$的**强极限**，也说$\{x_n\}$强收敛于$x$。

强收敛就是大家熟知的点列的依度量收敛。

**12.2 定义** 赋范空间$X$中的点列$\{x_n\}$称为是**弱收敛**的，如果存在着$x\in X$，使得对于所有的有界线性泛函$f\in X'$，都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

记为

$$x_n \xrightarrow{w} x$$

称元$x$为$\{x_n\}$的**弱极限**，也称$\{x_n\}$弱收敛于$x$。

点列的弱收敛具有以下性质。

**12.3 定理** 假设$\{x_n\}$是赋范空间$X$中的弱收敛序列，即$x_n \xrightarrow{w} x$，则

(Ⅰ) $\{x_n\}$的弱极限$x$是唯一的；

(Ⅱ) $\{x_n\}$的每一个子序列均弱收敛于$x$；

(Ⅲ) 序列$\{\|x_n\|\}$有界。

**证** (Ⅰ) 假设弱极限不唯一，$x_n \xrightarrow{w} x$又$x_n \xrightarrow{w} y$，则$f(x_n) \longrightarrow f(x)$且$f(x_n) \longrightarrow f(y)$，其中$f\in X'$，因为$\{f(x_n)\}$是数列，其极限唯一，必有$f(x)=f(y)$，亦即，对于每一个$f\in X'$都有

$$f(x)-f(y)=f(x-y)=0$$

再由推论11.3，推得$x-y=0$，即$x=y$。

（Ⅱ）注意到$\{f(x_n)\}$是收敛数列，结论显然成立。

（Ⅲ）因为$\{f(x_n)\}$是收敛数列，必有界，即对于一切$n$，$|f(x_n)|\leqslant C_f$，这里常数$C_f$仅依赖于泛函$f$的选取而与$n$无关。利用自然映射$C$：$X\to X''$，定义$g_{x_n}\in X''$为

$$g_{x_n}(f)=f(x_n)\qquad (f\in X')$$

则对于所有的$n$，有

$$|g_{x_n}(f)|=|f(x_n)|\leqslant c_f$$

这说明对于每一个$f\in X'$，序列$\{|g_{x_n}(f)|\}$有界，因为$X'$完备，由一致有界定理11.5推出$\{\|g_{x_n}\|\}$有界，再根据引理11.10，$\|g_{x_n}\|=\|x_n\|$。

**12.4 定理** 假设$X$是赋范空间，$\{x_n\}$是$X$中的点列，$x\in X$，如果

（Ⅰ）序列$\{\|x_n\|\}$有界；

（Ⅱ）若$A\subset X'$是完全集，对于任意$f\in A$，都有$f(x_n)\to f(x)$；

则$x_n\xrightarrow{w}x$。

**证** 由（Ⅰ），对于所有的$n$，有$\|x_n\|\leqslant M$，并且$\|x\|\leqslant M$，其中$M$是一个充分大的常数。由于$A$是$X'$中的完全集，对于任意的$f\in X'$，必存在序列$\{f_m\}\in\text{span}A$，使得$f_m\longrightarrow f$，因此，对任给的$\varepsilon>0$，可找到这样的$m$，使之有

$$\|f_m-f\|<\frac{\varepsilon}{3M}$$

另一方面，因为$\{f_m\}\in\text{span}A$，又由（Ⅱ），必存在$N(\varepsilon)>0$，使得对于一切$n>N(\varepsilon)$，得到

$$\left|f_m(x_n)-f_m(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

使用这两个不等式，当$n>N(\varepsilon)$时，蕴含

$$|f(x_n)-f(x)|\leqslant|f(x_n)-f_m(x_n)|+|f_m(x_n)-f_m(x)|+|f_m(x)-f(x)|$$

$$<\|f-f_m\|\|x_n\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|f_m-f\|\|x\|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3M}\cdot M+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3M}M=\varepsilon$$

再由$f\in X'$的任意性，得到$x_n\xrightarrow{w}x$。

强收敛与弱收敛有以下关系。

**12.5 定理** 假设$\{x_n\}$是赋范空间$X$中的点列，则强收敛蕴含弱收敛。

**证** 由定义，$x_n\longrightarrow x$即$\|x_n-x\|\longrightarrow 0$，则对于任意的$f\in X'$，总有

$$|f(x_n)-f(x)|=|f(x_n-x)|\leqslant\|f\|\|x_n-x\|\longrightarrow 0$$

于是，$x_n\xrightarrow{w}x$。

注意：定理12.5的逆不真。但如果$X$是有限维空间，则两种收敛彼此等价。

**12.6 定理** 如果$X$是赋范空间，且$\dim X<\infty$，则弱收敛与强收敛彼此等价。

**证** 设$\{x_n\}$是$X$中的点列，$x\in X$，由定理12.5只需证明$x_n\xrightarrow{w}x$蕴含$x_n\longrightarrow x$，不妨设$\dim X=m$，$E=\{e_1,\cdots,e_m\}$是$X$的一组基，则有

$$x_n=\alpha_1^{(n)}e_1+\cdots+\alpha_m^{(n)}e_m$$

和 $x=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_me_m$，由弱收敛的定义，对于任意的$f\in X'$，

有$f(x_n)\longrightarrow f(x)$，特别取$E$的对偶基$\{f_1,\cdots,f_m\}$，则

$$f_k(e_i)=\delta_{ki}=\begin{cases}1, & 若 i=k,\\ 0, & 若 i\neq k。\end{cases}$$

因此

$$f_k(x_n)=a_k^{(n)},\qquad f_k(x)=a_k$$

由$f_k(x_n)\longrightarrow f_k(x)$推得$a_k^{(n)}\longrightarrow a_k$，据此，得到

$$\|x_n-x\|=\left\|\sum_{k=1}^{m}(a_k^{(n)}-a_k)e_k\right\|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m}|a_k^{(n)}-a_k|\|e_k\|\longrightarrow 0\qquad (n\to\infty)$$

亦即$\{x_n\}$强收敛于$x_0$。

那么，除了有限维空间以外，是否存在着其点列强收敛与弱收敛等价的无限维空间呢？1921年，I.Schur 首先证明了$l^1$空间亦具备此种特性。

**12.7 定理** 在空间$l^p$中（$1<p<+\infty$），$x_n\xrightarrow{w}x$当且仅当

（Ⅰ）序列$\{\|x_n\|\}$有界；

（Ⅱ）对于固定的$k$，$x_n=(\xi_k^{(n)})$和$x=(\xi_k)$，有$\xi_k^{(n)}\to\xi_k(n\longrightarrow\infty)$。

亦即，$l^p$空间中点列的弱收敛是按坐标收敛。

**证** 因为空间$l^p$的对偶空间是$l^q$，其中$p$和$q$是共轭指数。令空间$l^q$的一组Schauder基为（$e_n$），这里$e_n=$（$\delta_{nk}$），则生成空间span（$e_n$）在$l^q$中稠，根据定理12.4，结论显然成立。

**12.8 定理** 设点列$\{x_n\}\in C[a,b]$，$x_0\in C[a,b]$，$x_n\xrightarrow{w}x_0$

则

（Ⅰ）$\{x_n(t)\}$作为函数列在区间$[a,b]$上处处收敛于$x_0(t)$；

（Ⅱ）$\{\|x_n\|\}$有界。

**证**　（Ⅱ）是定理12.3（Ⅲ）的直接结果，现证（Ⅰ）。任取$t_0\in[a,b]$，在$C[a,b]$上定义泛函$f_0$，有$f_0(x)=x(t_0)$，其中$x\in C[a,b]$。显然$f_0$是空间$C[a,b]$上的有界线性泛函。因为$x_n\xrightarrow{w}x_0$，必有$f_0(x_n)\to f_0(x_0)$，即$x_n(t_0)\to x_0(t_0)$，由$t_0$的任意性，（Ⅰ）成立。

可以证明，12.8中所给的条件还是充分的，这可以从一般的泛函分析书中查到。

## 习　题

1. 如果$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是赋范空间$X$中的点列，证明$x_n\xrightarrow{w}x$，$y_n\xrightarrow{w}y$蕴含着$x_n+y_n\xrightarrow{w}x+y$，$\alpha x_n\xrightarrow{w}\alpha x$，其中$\alpha$是任意标量。

2. 假设$X$和$Y$都是赋范空间，$T\in B(X,Y)$，$\{x_n\}\in X$，证明若$x_n\xrightarrow{w}x_0$，则$Tx_n\xrightarrow{w}Tx_0$

3. 如果$X$是赋范空间，$x_n\in X$，且$x_n\to x_0$，证明：存在着$\{x_n\}$的线性组合作成的序列$\{y_m\}$，有$y_m\to x_0$.

4. （弱Cauchy序列）称赋范空间$X$中的点列$\{x_n\}$为弱Cauchy序列，如果对于每一个$f\in X'$，$\{f(x_n)\}$是Cauchy数列．证明弱Cauchy序列必有界．

5. 假设$A$是赋范空间$X$中的非空子集，并且$A$的每一个非空子集都包含一个弱Cauchy序列，证明$A$是有界集．

6. （弱完备性）赋范空间$X$称为是弱完备的，如果$X$中每一个弱Cauchy序列在$X$中均弱收敛．证明：如果$X$是自反空间，则$X$必是弱完备的．

# 第四章　内积空间、Hilbert空间

赋范空间和Banach空间具有代数结构（线性运算），又具有拓扑结构（范数），因而是一种性质极好的空间。我们已初步看到，这个空间理论极为丰富，应用极为广泛。尽管如此，赋范空间仍旧缺少人们所熟悉的内积，以及作为许多应用的重要工具的正交性。那么，可否将欧氏空间中向量间的内积和正交性的概念推广到一般线性空间中？实际上，在一定的条件下是可以做到的。这就导出了内积空间和Hilbert空间。

内积空间是特殊的赋范空间。它的出现还早于赋范空间，其理论很丰富。同时，它保留着Euclid空间的许多特性，其中最重要的是正交性的概念。实际上，内积空间或许是Euclid空间最自然的推广。大家将会注意到：这个领域中的概念以及理论性的证明是极为和谐统一的。整个理论起源于D.Hilbert（1912）关于积分方程的工作，而普遍的使用几何术语和记号则是E.Schmidt（1908）采纳了G.Kowalewski的建议而首创。这些空间现在已经成为在泛函分析的实际应用中最为常见的空间了。

## §1　内积空间、Hilbert空间

**1.1　定义**　内积空间X是具有内积的线性空间。Hilbert空间是完备（指在内积所决定的度量下完备）的内积空间。空间X上的内积是空间 $X\times X$到X的标量域K的映射，

亦即，对于$X$中的任意元$x$，$y$，总有一个称为是$x$与$y$的**内积**的标量

$$\langle x,y\rangle$$

与之对应，使得对于所有的$x$，$y$，$z\in X$和标量$\alpha$，成立着

(*IP*1) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$；

(*IP*2) $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$；

(*IP*3) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$；

(*IP*4) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$，$\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当$x=0$。

在内积公理（*IP*3）中，横线“—”表示复共轭。如果$X$是实线性空间，则（*IP*3）化为

$$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle \qquad \text{（对称性）}$$

从定义1.1，容易推得

$$\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\langle \alpha x,z\rangle+\langle \beta y,z\rangle$$

$$\langle x,\alpha y\rangle=\overline{\alpha}\langle x,y\rangle \tag{1}$$

$$\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\overline{\alpha}\langle x,y\rangle+\overline{\beta}\langle x,z\rangle$$

从（1）式中的第一式知内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$关于第一个因子是线性的，而（1）式的第三式叫作它关于第二个因子是共轭线性的或半线性的。

显然，$X$上的内积定义了其上的范数和度量，对于任意的$x$，$y\in X$，我们有

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle} \tag{2}$$

和

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle} \tag{3}$$

因此，内积空间必为赋范空间，Hilbert空间必是Banach空间。但是，此论断之逆却未必成立。

**1.2 引理（平行四边形公式）** 设X为内积空间，$\|\cdot\|$是由内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$决定的范数，则对于任意的$x$，$y\in X$，都有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2) \tag{4}$$

(4)式称为平行四边形公式，它的最简单的几何说明如图4-1。引理1.2说明由内积决定的范数必须适合平行四边形公式。

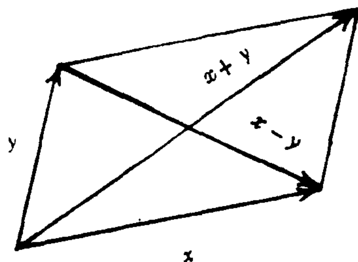



图 4-1 平面中的平行四边形公式图示

**证** 由(2)式，有

$$\begin{aligned}&\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\\&=\langle x+y,\ x+y\rangle\\&\quad+\langle x-y,\ x-y\rangle\\&=\langle x+y,\ x\rangle+\langle x+y,\ y\rangle+\langle x-y,\\&\quad x\rangle-\langle x-y,\ y\rangle\\&=\langle x,\ x\rangle+\langle y,\ x\rangle+\langle x,\ y\rangle+\langle y,y\rangle\\&\quad+\langle x,\ x\rangle-\langle y,\ x\rangle-\langle x,y\rangle\\&\quad+\langle y,\ y\rangle\\&=2\langle x,\ x\rangle+2\langle y,\ y\rangle=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\end{aligned}$$

**1.3 定义** 内积空间$X$中的元$x$称为**正交**于元$y\in X$，如果$\langle x,\ y\rangle=0$。此时，也说$x$和$y$是彼此正交的，记为$x\perp y$。同样，对于$X$中的子集$A$和$B$，称x**正交于A**，记为$x\perp A$，如果对于一切$a\in A$，都有$x\perp a$。称**二子集A和B是彼此正交**的，记为$A\perp B$，如果对于所有的$a\in A$和$b\in B$都有$a\perp b$。

**1.4 引理** 内积和它决定的范数满足

(Ⅰ) $|\langle x,\ y\rangle|\leqslant\|x\|\|y\|$ **（Schwarz不等式）** (5)

等号成立当且仅当$x$与$y$线性相关。

(Ⅱ) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ **（三角不等式）** (6)

**证**　（Ⅰ）如果$y=0$，(5)式显然成立。不妨设$y\neq 0$，则对任意标量$\alpha$，总有

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \|x-\alpha y\|^2 = \langle x-\alpha y,\ x-\alpha y\rangle \\
&= \langle x-\alpha y,\ x\rangle - \langle x-\alpha y,\ \alpha y\rangle \\
&= \langle x,\ x\rangle - \alpha\langle y,\ x\rangle - \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle y,\ y\rangle \\
&= \langle x,\ x\rangle - \overline{\alpha}\langle x,\ y\rangle - \alpha[\langle y,\ x\rangle - \overline{\alpha}\langle y,\ y\rangle]
\end{aligned}
$$

取$\overline{\alpha}=\langle y,\ x\rangle/\langle y,\ y\rangle$，显然上式方括号一项为零，所以

$$
0 \leqslant \langle x,\ x\rangle - \frac{\langle y,\ x\rangle}{\langle y,\ y\rangle}\langle x,\ y\rangle = \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}
$$

用$\|y\|^2$去乘上式各项，得到

$$
0 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x,\ y\rangle|^2
$$

于是，

$$
|\langle x,\ y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|
$$

后一个结论显然成立。

（Ⅱ）因为由Schwarz不等式，有

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 = \langle x+y,\ x+y\rangle &= \|x\|^2 + \langle x,\ y\rangle + \langle y,\ x\rangle + \|y\|^2 \\
&\leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x,\ y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}
$$

所以　$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

(6)式若取等号，必有$\langle x,\ y\rangle + \langle y,\ x\rangle = 2\|x\|\|y\|$，于是$\mathrm{Re}\langle x,\ y\rangle = \|x\|\|y\| \geqslant |\langle x,\ y\rangle|$，因此$\|x\|\|y\| = |\langle x,\ y\rangle|$，故$x=0$，或者$x=cy$。下证$c$是非负实数。因为$\mathrm{Re}\langle x,\ y\rangle = |\langle x,\ y\rangle|$，所以$\langle x,\ y\rangle = \mathrm{Re}\langle x,\ y\rangle \geqslant 0$，$0 \leqslant \langle x, y\rangle = \langle cy,\ y\rangle = c\|y\|^2$。

注意：Schwarz不等式(5)是一个十分重要的不等式，在以后的讨论中经常使用。

而引理1.4中的(Ⅱ)部份，立即推得范数公理 ($N4$) 成立，其它的三个公理($N1$)，($N2$)，($N3$)容易验证，所以，由(2)式确定了范数。

**1.5 引理** 在内积空间 $X$ 中，如果$x_n\to x$且$y_n\to y$，则$\langle x_n, y_n\rangle\to\langle x, y\rangle$。

**证** 因为$x_n\to x$，$y_n\to y$，亦即$\|x_n-x\|\to 0$，$\|y_n-y\|\to 0$ $(n\to\infty)$，因此，

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle-\langle x,y\rangle| &= |\langle x_n,y_n\rangle-\langle x_n,y\rangle+\langle x_n,y\rangle-\langle x,y\rangle|\\ &\leqslant|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x_n,y\rangle|+|\langle x_n,y\rangle-\langle x,y\rangle|\\ &=|\langle x_n,y_n-y\rangle|+|\langle x_n-x, y\rangle|\\ &\leqslant\|x_n\|\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\|y\|\to 0\\ &\quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

引理1.5又称为内积的连续性。

**1.6 例**

(1°) **Euclid空间**$R^n$是Hilbert空间。对于任意的$x$, $y\in R^n$，$x=(\xi_i)$，$y=(\eta_i)$，其内积为

$$\langle x, y\rangle=\xi_1\eta_1+\cdots+\xi_n\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\eta_k$$

所以，其范数为$\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}=\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\right)^{1/2}$。

(2°) 酉空间$C^n$是Hilbert空间。对于任意的$x$, $y\in C^n$，$x=(\xi_i)$，$y=(\eta_i)$，其内积为

$$\langle x, y\rangle=\xi_1\overline{\eta_1}+\cdots+\xi_n\overline{\eta_n}=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\overline{\eta_k}$$

其中横线"—"表示取复共轭。其范数为

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^{1/2}$$

(3⁰) **空间**$L^2[a, b]$是 Hilbert空间。对于任意的$x(t)$，$y(t) \in L^2[a, b]$，其内积定义成

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt \tag{7}$$

则范数$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$。特别，当考虑实$L^2[a, b]$时，内积为

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt \tag{8}$$

它作为空间$C[a, b]$的完备化空间，其完备性是不言而喻的。

(4⁰) **空间**$l^2$是Hilbert空间，对于任意的$x, y \in l^2$, $x = (\xi_i)$，$y = (\eta_i)$，其内积为

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}$$

所以，范数为$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{1/2}$。

(5⁰) **空间** $l^p$ $(1 \leqslant p < +\infty, \ p \neq 2)$ 不是内积空间。

取$x = (1, 1, 0, 0, \cdots)$，$y = (1, -1, 0, 0, \cdots)$，则$x$，$y \in l^p$是显然的。且$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} = 2^{1/p}$, $\|y\|_p = 2^{1/p}$

但是，$x+y=(2, 0, 0, 0, \cdots)$，$x-y=(0, 2, 0, 0\cdots)$，$\|x+y\|_p^2+\|x-y\|_p^2=2^2+2^2=8$，而$2(\|x\|_p^2+\|y\|_p^2)=2[(2^{1/p})^2+(2^{1/p})^2]=4\cdot 2^{2/p}$，因为$p\neq 2$，故平行四边形公式不成立，因此，$l^p$不是内积空间。

$(6^0)$　$C[a, b]$不是内积空间。

取$x(t)=1$，$y(t)=\dfrac{t-a}{b-a}$，显然$x$，$y\in C[a, b]$，我们有

$\|x\|=\max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)|=1$，$\|y\|=\max\limits_{a\leq t\leq b}|y(t)|=$

$\max\limits_{a\leq t\leq b}\left|\dfrac{t-a}{b-a}\right|=1$，$x(t)+y(t)=1+\dfrac{t-a}{b-a}$，$x(t)-y(t)=$

$\dfrac{b-t}{b-a}$，所以$\|x+y\|=\max\limits_{a\leq t\leq b}\left|1+\dfrac{t-b}{b-a}\right|=2$，$\|x-y\|=$

$\max\limits_{a\leq t\leq b}\left|\dfrac{b-t}{b-a}\right|=1$，$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5$，$2(\|x\|^2+\|y\|^2)$

$=4$。平行四边形公式不成立。

从内积空间中的内积出发，可以定义出范数，它满足平行四边形公式。反之，从内积空间的范数出发，也可以将内积表示出来。如果是实内积空间，有

$$\langle x, y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) \tag{9}$$

若是复内积空间，则

$$\langle x, y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|-i\|x-iy\|) \tag{10}$$

(9)和(10)式称为极化恒等式。

**1.7 定理** 对于任意内积空间$X$，必存在着一个Hilbert空间$H$和从$X$到$H$的稠子空间$W$的同构映射，并且在同构意义下，空间$H$是唯一的。

定理的证明同第二章定理6.2，这里，可定义$H$上的内积为 $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle$。

内积空间之间的同构映射是指保持内积不变的线性双射。此时，也称二内积空间同构。

内积空间$X$的子空间$Y$是$X$的一个内积子空间，$Y$中的内积是由$X$中的内积限制在$Y\times Y$上而得到的。

同样地，Hilbert空间$H$的子空间$Y$是$H$的一个内积子空间，但不必是Hilbert空间。

**1.8 定理** 设$Y$是Hilbert空间$H$的子空间，则

(Ⅰ) $Y$完备当且仅当$Y$是$H$中的闭集；

(Ⅱ) 若$Y$是有限维空间，则$Y$完备；

(Ⅲ) 如果$H$是可分的，则$Y$也是可分的。一般地，可分内积空间的每一个子空间仍是可分的。

此定理是第三章定理3.1，定理4.2的自然推论。

## 习 题

1. (Pythagoras定理) 如果在内积空间$X$中有$x\perp y$，证明$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$。将此结论推广到$m$个正交向量的情形。

2. 如果上题中的$X$是实内积空间，证明反过来，给定的关系蕴含着$x\perp y$。但如果$X$是复内积空间，则上述结论不成立。举例说明。

3. 设$X$是全体有序复数对作成的线性空间，从一个内积

可以得到$X$上的范数$\|x\|=|\xi_1|+|\xi_2|$吗？这里$x=(\xi_1, \xi_2)$。

4. 在空间$R^2$和$R^3$中的Schwarz不等式是什么？请给出另外的证明。

5. 如果$\{x_n\}$是内积空间中的序列，证明条件$\|x_n\|\to\|x\|$和$\langle x_n, x\rangle\to\langle x, x\rangle$蕴含着收敛$x_n\to x$。

6. 设$X$是由关于$t$的多项式$x=0$和次数不超过2的实多项式组成的内积空间，当$t\in[a, b]$时，内积由本节(7)式给出，证明$X$是完备的。令$Y$是由使得$x(a)=0$的全体$x\in X$作成的集，则$Y$是$X$的子空间吗？全体次数为2的$x\in X$作成$X$的子空间吗？

7. 证明：在内积空间中，$x\perp y$当且仅当对于所有的标量$a$，有$\|x+ay\|=\|x-ay\|$。

8. 设$Y$是区间$[a, b]$上全体连续复值函数作成的线性空间。令$X_1=(Y, \|\cdot\|_\infty)$，其中$\|x\|_\infty=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$；又设$X_2=(Y, \|\cdot\|_2)$，这里$\|x\|_2=\sqrt{\langle x, x\rangle}$，$\langle x, y\rangle \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$，证明$X_1\to X_2$上的恒同映射$I$：$x\longmapsto x$是连续的(但不同胚，$X_2$不完备)。

## §2 凸集、正交补与直和

在度量空间$X$中，元$x\in X$到非空子集$A\subset X$的**距离**$\delta$定义成

$$\delta=\inf_{y\in A} d(x, y) \tag{1}$$

在赋范空间中，则成为

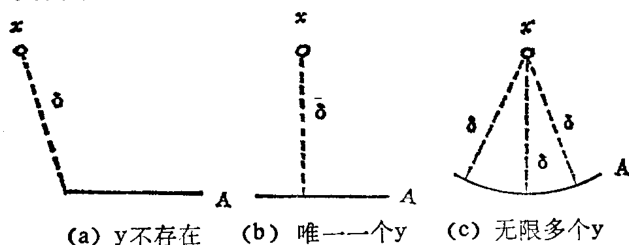
$$\delta = \inf_{y \in A} \|x - y\| \tag{2}$$

显然，要知道是否存在着点$y \in A$，使得

$$\delta = \|x - y\| \tag{3}$$

是个重要的问题。另一方面，如果这样的元存在，它是否唯一呢？从数学上讲，就是所谓存在与唯一性问题，这无论在理论上还是在实践中都很重要，例如，在函数的逼近理论中就是如此。

图4-2说明，甚至在非常简单的Euclid平面$R^2$中，也可能没有这样的y能满足(3)式(图(a))；或者只有唯一的一个y合于要求（图(b)）；或者有无限多个$y$合于要求(图(c))。可以预料，在另外的空间，尤其是无限维空间中，这个问题会复杂得多。然而，对于Hilbert空间来说，却有着简单明了的关系。这样一个事实是惊人的，它有着各种各样理论的和实际的结果。这也就是为什么Hilbert空间理论较之于Banach空间理论更简单的原因之一。



(a) y不存在　(b) 唯一一个y　(c) 无限多个y

图4-2　最佳逼近的几种情形

现在介绍线性空间中凸集的概念。凸集理论与数学的许多分支有着密切的联系，并且有广泛的实际应用。

**2.1　定义**　设X是线性空间，$A$是$X$的子集，如果对于

$A$中的任意两点$x$和y，联结它们的线段

$$\{\lambda x+(1-\lambda)y|_{0\leq\lambda\leq1}\} \qquad (4)$$

都在集$A$中，则称$A$为空间$X$中的**凸集**。

由此定义，显然，空间X中的空集、单点集以及X的任意线性子空间都是X中的凸集。

**2.2 例**

（$1^0$）设$X$是赋范空间，则其单位开球

$$B(0; 1)=\{x|_{x\in X, \|x\|<1}\}$$

是凸集。因为对于任意$x$，$y\in B(0; 1)$，总有$\|x\|<1$，$\|y\|<1$，对合于条件$0\leq\lambda\leq1$的任何$\lambda$，都有$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|\leq|\lambda|\|x\|+|1-\lambda|\|y\|<1$。

当然，X中的闭单位球$\tilde{B}(0, 1)=\{x|_{x\in X, \|x\|\leq1}\}$亦是凸集。

（$2^0$） 空间$C[a, b]$中一切非负元集

$$E=\{f(t)|_{f(t)\in C[a,b], f(t)\geq0当a\leq t\leq b时}\}$$

是$C[a, b]$中的凸集。

（$3^0$） 给定集合$A=\{a_i|_{i是自然数}\}$，则集$A$上的一切概率分布

$$E=\{p_i|_{i是自然数}\}: \quad \sum_{i=1}^{\infty}p_i=1, \ p_i\geq0(i=1,2, \cdots)构成定$$

义在$A$上的全体函数作成的空间上的凸集。

**2.3 定理** 凸集具有下述性质：

（Ⅰ） 凸集的闭包仍为凸集；

（Ⅱ） 任意多个凸集的交集仍为凸集。

**证** （Ⅰ） 假设X是线性空间，A是X中的凸集。令任意的$x$，$y\in\overline{A}$，必有$\{x_n\}\in A$，$\{y_n\}\in A$，并且$x_n\to x$，$y_n\to y$。

因为$A$是凸集，对于合于条件$0\leqslant\lambda\leqslant1$的任何$\lambda$，$z_n=\lambda x_n+(1-\lambda)y_n\in A$，由第二章定理4.5(Ⅰ)，有

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left[\lambda x_n+(1-\lambda)y_n\right]$$

$$=\lambda\lim_{n\to\infty} x_n+(1-\lambda)\lim_{n\to\infty} y_n$$

$$=\lambda x+(1-\lambda)y\in\overline{A}$$

又由$\lambda$的任意性，$\overline{A}$是凸集。

(Ⅱ) 设$A=\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha$，其中每一个$A_\alpha$都是线性空间$X$中的凸集。令$x$，$y$是$A$中任意两点，则它们必属于所有的$A_\alpha$，于是联结$x$和$y$的线段(4)必含在每一个$A_\alpha$中，因而必含于$A_\alpha$的交集$A$中，于是$A$是凸集。

**2.4 推论** 任意多个闭凸集的交集仍是闭凸集。

**2.5 定义** 设$A$是赋范空间$X$中的任意集合，则包含$A$的最小闭凸集称为集$A$的**闭凸包**。

现在，我们来证明本节的一个主要工具。

**2.6 定理** 设$X$是内积空间，$A$是$X$的一个完备凸子集$A\neq\phi$，则对于每一个给定的$x\in X$，必存在着唯一的$y\in A$，使得

$$\delta=\inf_{\tilde{y}\in A}\|x-\tilde{y}\|=\|x-y\| \tag{5}$$

**证** 先证存在性。由下确界的定义，存在着序列$\{y_n\}\in A$，使得

$$\delta_n\to\delta \qquad (n\to\infty) \tag{6}$$

其中$\delta_n=\|x-y_n\|$，并且$\delta_n\geqslant\delta$，下证$\{y_n\}$是Cauchy序列。记

$y_n - x = v_n$，显然$\|v_n\| = \delta_n$。因为$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| =$

$2\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\| \geqslant 2\delta$，这里，利用了$A$凸，$[(y_n + y_m)/2]$

$\in A$。于是，由平行四边形公式，得到

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|(x + v_n) - (x + v_m\|)^2 = \|v_n - v_m\|^2 \\ &= -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2) \\ &\leqslant -(2\delta)^2 + 2(\delta^2{}_n + \delta^2{}_m) \\ &= 2(\delta^2{}_n - \delta^2) + 2(\delta^2_m - \delta^2),\end{aligned}$$

再由(6)式，知上不等式的右端可任意小，所以推得$\{y_n\} \in A$是Cauchy序列。由假设，$A$是完备的，$\{y_n\}$收敛，必存在$y \in A$，使得$y_n \to y$。但是，$\|v_n\| = \|y_n - x\| = \delta_n \geqslant \delta$，于是$\|y - x\| \geqslant \delta$。另一方面，$\|x - y\| \leqslant \|x - y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \to \delta$，必有$\|x - y\| \leqslant \delta$。总之，有$\|x - y\| = \delta$。

现证唯一性。假设结论不真，则还有$y_0 \in A$，使得$\|x - y_0\| = \delta$，由平行四边形公式，

$$\begin{aligned}\|y - y_0\|^2 &= \|(y - x) - (y_0 - x)\|^2 \\ &= 2\|y - x\|^2 + 2\|y_0 - x\|^2 - \|(y - x) + (y_0 - x)\|^2 \\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - \|y + y_0 - 2x\|^2 \\ &= 4\delta^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y + y_0) - x\right\|^2 \qquad (7)\end{aligned}$$

显然，由$A$的凸性，$[(y + y_0)/2] \in A$，因此有$\left\|\frac{1}{2}(y - y_0) - x\right\|$

$\geqslant \delta^2$，代入(7)式，推得

$$\|y - y_0\|^2 \leqslant 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

只有$y - y_0 = 0$，$y_0 = y$。

**2.7 引理** 在定理2.6中，取$A$为完备子空间$Y \subset X$，且

$x\in X$固定，则$z=x-y$必正交于$Y$。

**证** 假设结论不成立，即$z\perp Y$不成立，则至少存在着$y_1\in Y$，使得

$$\langle z,\ y_1\rangle=\beta\neq 0 \tag{8}$$

显然$y_1\neq 0$。对于任意标量$\alpha$，总有

$$\begin{aligned}\|z-\alpha y_1\|^2&=\langle z-\alpha y_1,\ z-\alpha y_1\rangle\\&=\langle z,\ z\rangle-\overline{\alpha}\langle z,\ y_1\rangle-\alpha\left[\langle y_1,\ z\rangle-\overline{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle\right]\\&=\|z\|^2-\overline{\alpha}\beta-\alpha\left[\overline{\beta}-\overline{\alpha}\|y_1\|^2\right]\end{aligned}$$

从（5）式，$\|z\|^2=\|x-y\|^2=\delta^2$，特别，取$\overline{\alpha}=\overline{\beta}/\|y_1\|^2$，则上式右端最后一项为零，所以

$$\|z-\alpha y_1\|^2=\delta^2-\frac{|\beta|^2}{\|y_1\|^2}<\delta^2$$

这是不可能的，即(8）式不可能成立。

据此，有下述重要结果。

**2.8 定义** 线性空间$X$称为是它的两个子空间$Y$和$Z$的**直和**，记为$X=Y\oplus Z$，如果每一个元$x\in X$，都有唯一的表示：$x=y+z$，其中$y\in Y$，$z\in Z$。此时，称$Z$为$Y$在$X$中的**代数补集**，反之亦然。于是，称$Y$和$Z$是$X$中的子空间的**互补偶**。

假设$X=R^2$，则$Y=R^1$是$X$的一个子空间。显然$X$中每一条不平行于$Y$的直线都是$Y$的代数补集。但是最方便、最简单实用的是它的垂线，这就是为什么Descartes坐标系选择两条互相垂直的直线的原因。

基于同样的理由，在一般的Hilbert空间$H$中，我们也总

是将$H$表示成它的一个闭子空间$Y$与它的正交补集

$$Y^{\perp}=\{z\in H|_{z\perp Y}\} \tag{9}$$

的直和，这就得到了重要的投影定理。

**2.9 定理** 设$Y$是Hilbert空间$H$的任意闭子空间，则

$$H=Y\oplus Z, \text{其中} Z=Y^{\perp} \tag{10}$$

**证** 由于$H$是Hilbert空间，$Y\subset H$是闭集，故$Y$完备。由定义2.1知$Y$是凸集，所以，定理2.6和引理2.7蕴含着对于每一个$x\in H$，存在着$y\in Y$，使得

$$x=y+z, \text{其中} z\in Z=Y^{\perp} \tag{11}$$

下证唯一性。假设$x=y+z$且$x=y_1+z_1$，其中$y$，$y_1\in Y$，$z$，$z_1\in Z$，于是$y+z=y_1+z_1$，因此，$y-y_1=z_1-z$，但是，$y-y_1\in Y$，$z_1-z\in Z=Y^{\perp}$，所以$y-y_1\in Y\cap Y^{\perp}=\{0\}$，$y=y_1$，也有$z=z_1$。

如果Hilbert空间$H$有直和分解$H=Y\oplus Z$，$Z=Y^{\perp}$，则任意$x\in H$都有唯一的分解$x=y+z$，称$y$是元$x$在闭子空间$Y\subset H$上的正交投影。这就决定了一个映射

$$P: H\to Y$$

$$x\longmapsto y$$

即$Px=y$，$P$称为$H$到$Y$的**投影算子**。易证$P$是有界线性算子（自证）。显然，$P$是$Y$到自身的恒同算子；它还把空间$Z=Y^{\perp}$映到$\{0\}$。

$P$还是**幂等算子**：对于所有$x\in H$，都有$P^2x=P(Px)=Px$，即$P^2=P$。

**2.10 引理** Hilbert空间$H$的闭子空间$Y$的正交补集$Y^{\perp}$是$H$到$Y$上的投影算子的零空间。

其实正交补集$Y^{\perp}$还是一个特殊的零化因子（参看第三章§10习题6）。

**2.11 引理** Hilbert空间$H$的子集$A$的正交补集$A^{\perp}$是$H$的闭子空间。

**证** 对于任意的$x$，$y\in A^{\perp}$，和任意标量$\alpha$，$\beta$以及任意的$v\in A$，有

$$\langle \alpha x+\beta y,\ v\rangle=\alpha\langle x,v\rangle+\beta\langle y,v\rangle=0$$

所以$\alpha x+\beta y\in A^{\perp}$，于是$A^{\perp}$是线性子空间。

假设$x\in\overline{A^{\perp}}$，则必存在着$\{x_n\}\in A^{\perp}$，$x_n\to x$，但对任意的$v\in A$，总有$\langle x_n,v\rangle=0$ $(n=1,\ 2\cdots)$，因此，由内积的连续性，$\langle x,\ v\rangle=\langle\lim\limits_{n\to\infty}x_n,\ v\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n,\ v\rangle=0$，于是$x\in A^{\perp}$，$\overline{A}^{\perp}\subset A^{\perp}$，所以，$A^{\perp}=\overline{A^{\perp}}$，$A^{\perp}$闭。

记$(A^{\perp})^{\perp}=A^{\perp\perp}$，显然它也是$H$的闭线性子空间，并且

$$A\subset A^{\perp\perp}$$

但是，我们有以下引理。

**2.12 引理** 如果$Y$是Hilbert空间$H$的闭子空间，则

$$Y=Y^{\perp\perp}$$

**证** 由(12)式，只需证$Y^{\perp\perp}\subset Y$。设$x\in Y^{\perp\perp}\subset H$，则由定理2.9，$x=y+z$，$y\in Y\subset Y^{\perp\perp}$，$z\in Y^{\perp}$，因为$Y^{\perp\perp}$是线性空间，且$x\in Y^{\perp\perp}$，于是$z=x-y\in Y^{\perp\perp}$，所以$z\perp Y^{\perp}$，因此$z=0$，则$x=y$，于是$x\in Y$，由$x$的任意性，蕴含$Y^{\perp\perp}\subset Y$。

利用定理2.9，还可推出下述结论。

**2.13 定理** Hilbert空间$H$的任意非空子集$A$的生成集在$H$中稠，其充要条件是$A^{\perp}=\{0\}$。

**证** 必要性。设$V=\mathrm{span}A$在$H$中稠，即$\overline{V}=H$。对于任意的$x\in A^{\perp}$，下证$x=0$。显然$x\in A^{\perp}\subset H$，所以$x\in\overline{V}$，存在着$\{x_n\}\in V$，$x_n\to x$。另一方面，对于任意$y\in V$，必有标量

$\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 和 $\widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_p \in A$，使得$y=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\widetilde{x}_i$。因此，对任意$x\in A^\perp$，必有 $\langle x, \widetilde{x}_i\rangle=0$ $(i=1, 2, \cdots, p)$，所以

$\langle x, y\rangle=\langle x, \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\widetilde{x}_i\rangle=\sum_{i=1}^{p}\overline{\alpha_i}\langle x, \widetilde{x}_i\rangle=0$，这蕴含$A^\perp\perp V$。

于是$\langle x_n, x\rangle=0$ $(n=1, 2, \cdots)$，由内积的连续性，有$0=\langle x_n, x\rangle\longrightarrow\langle x, x\rangle$，故$x=0$，再由$x$的任意性，得到$A^\perp=\{0\}$。

充分性。设$A^\perp=\{0\}$，若$x\perp V$，由上段证明知，$x\perp A$，于是$x\in A^\perp$，$x=0$，因此$V^\perp=\{0\}$，$\overline{V^\perp}=\overline{\{0\}}=\{0\}$。下证$\overline{V}^\perp=\overline{V}^{\perp}$。显然有$\overline{V}^\perp\subset\overline{V}^\perp$，反之，对于任意$y\in\overline{V}^\perp$，则$y\perp\overline{V}$所以$y\perp V$。于是$y\in V^\perp$，$y\in\overline{V}^\perp$，因此$\overline{V}^\perp\subset\overline{V^\perp}$。在定理2.9中，取$Y=\overline{V}$，则$H=\overline{V}\oplus\overline{V}^\perp=\overline{V}\oplus\{0\}=\overline{V}$。$V=\mathrm{span}A$ 在$H$中稠。

## 习 题

1．证明范数公理（N4）可以用单位球的凸性代替．

2．设$A$和$B$都是线性空间$X$中的凸集，证明$A+B$也是$X$中的凸集。这里，$A+B$表全体$A$中的元与$B$中元的和向量作成的集．

3．（凸函数）设$X$是线性空间，$f: X\to R$称为凸函数，如果对于任意$x, y\in X$，$0\leqslant\theta\leqslant1$，有$f(\theta x+(1-\theta)y)\leqslant\theta f(x)+(1-\theta)f(y)$。证明$X$上的范数$\|\cdot\|: X\to R$是一个凸函数．

4．设$H$是Hilbert空间，$A\subset H$是凸集，$\{x_n\}\in A$，并且$\|x_n\|\to d$，这里$d=\inf_{x\in A}\|x\|$，证明$\{x_n\}$在$H$中收敛．并举$R^2$和$R^3$中例子说明．

5．设$X=R^2$，确定$A^\perp$，如果$A$是：(i)$\{x\}$，这里$x=(\xi_1, \xi_2)\neq0$；(ii) 一个线性无关的集$\{x_1, x_2\}\subset X$．

6.设$A$和$B$都是内积空间$X$的非空子集，且$A\subset B$，证明：(i) $A\subset A^{\perp\perp}$；(ii) $B^{\perp}\subset A^{\perp}$；(ii) $A^{\perp\perp\perp}=A^{\perp}$。

7.证明Hilbert空间$H$的子空间$Y$在$H$中是闭的当且仅当$Y=Y^{\perp\perp}$。

8.设$A\neq\varnothing$是Hilbert空间$H$的子集，证明$A^{\perp\perp}$是$H$中包含$A$的最小闭子空间。

## §3 正交系与Bessel不等式

定理2.9指出了一个重要事实：任何Hilbert空间都可以分解成其闭子空间与它的正交补空间的直和，这样一个结果有着很多应用。其中一个重要用途，就是利用彼此两两正交的集合或序列来表示空间中的元。这正是Fourier级数表示$L^2$中函数的思想的推广。

**3.1 定义** 内积空间$X$中的**正交集**$A$是其元两两正交的子集$A\subset X$。**正交规范集**$A$是其元的范数为1的正交集，亦即，对于所有的$x$，$y\in A$，有

$$\langle x, y\rangle=\begin{cases}0, & 若\ x\neq y;\\ 1, & 若\ x=y。\end{cases} \tag{1}$$

如果正交集$A$可数，则称$A$为**正交序列**；而可数的正交规范集，称为**正交规范序列**。

一个集簇$(x_\alpha)$，$\alpha\in I$，$I$是指标集，称为是正交的，如果对于所有的$\alpha$，$\beta\in I$，且$\alpha\neq\beta$，有$x_\alpha\perp x_\beta$；集簇$(x_\alpha)$称为是**正交规范集簇**，如果它是正交集簇且其元的范数为1。于是，对于全体$\alpha$，$\beta\in I$，有

$$\langle x_\alpha, x_\beta\rangle=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}0, & 如果\ \alpha\neq\beta;\\ 1, & 如果\ \alpha=\beta。\end{cases} \tag{2}$$

**3.2 引理** 正交规范集是线性无关的。

**证** 设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是正交规范集，如果有$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in R$，使得$\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n=0$，用一固定的元$e_i$作内积，得到

$$\langle\sum_{k=1}^{n}e_k\alpha_k,\ e_i\rangle=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\langle e_k,e_i\rangle=\alpha_i\langle e_i,e_i\rangle=\alpha_i=0(i=1,$$

$2, \cdots, n$)由第二章定义1.6得证。

**3.3 例**

($1^0$) 在空间$R^3$中，$e_1=(1, 0, 0, )$，$e_2=(0, 1, 0)$，$e_3=(0, 0, 1, )$是正交规范集。

显然，空间$R^n$中，$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是正交规范集。其中$e_1=(1, 0, \cdots 0)$，$e_2=(0, 1, 0, \cdots 0)$，$\cdots$，$e_n=(0, 0, \cdots, 1)$。

($2^0$) 空间$l^2$中，$\{e_n\}$是其正交规范序列，其中$e_n=(\delta_{ni})$。

($3^0$) 在空间$C[0, 2\pi]$中，对于任意$x(t)$，$y(t)\in C[0, 2\pi]$，定义内积为

$$\langle x,\ y\rangle=\int_0^{2\pi}x(t)y(t)dt$$

则$1, \cos t, \cos 2t, \cdots, \cos nt, \cdots$和$\sin t, \sin 2t,\cdots,\sin nt,\cdots$都是$C[0, 2\pi]$上的正交序列。令$u_n=\cos nt(n=0, 1\cdots)$，$v_n=\sin nt(n=1, 2, \cdots)$则有

$$\langle u_m,\ u_n\rangle=\int_0^{2\pi}\cos mt\cos nt dt$$

$$=\begin{cases}0, & 若 m\neq n;\\ \pi, & 若 m=n=1, 2, \cdots;\\ 2\pi, & 若 m=n=0。\end{cases}$$

$$\langle v_m, \quad v_n \rangle = \int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt dt$$

$$= \begin{cases} 0, & 若 m \neq n; \\ \pi, & 若 m = n = 1, \ 2 \cdots。\end{cases}$$

于是得到正交规范系

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_n(t) = \frac{u_n(t)}{\sqrt{\pi}} = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} (n = 1, 2, \cdots),$$

$$\tilde{e}_n(t) = \frac{v_n(t)}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} (n = 1, \ 2, \ \cdots)。$$

把它们合起来也是空间$C[0, \ 2\pi]$上的正交规范系。其实，这就是通常初等微积分中研究Fourier 级数所使用的三角函数系。

一般说来，一个函数（或向量）用一个正交函数系（或正交向量序列）表出，最大的优点是容易确定出各项系数。

假设$(e_k)(k = 1, \ 2, \ \cdots, \ n)$是内积空间$X$中的一个正交规范集，并且$x \in \mathrm{span}\{e_1, \ \cdots, \ e_n\}$，$n \in N$固定（这里$N$表自然数集），显然有

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

其中$\alpha_k(k = 1, \ 2, \ \cdots, \ n)$是标量。对$e_i$取内积，得到

$$\langle x, \quad e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \quad e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, \quad e_i \rangle = \alpha_i$$

代入上式，有

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, \quad e_k \rangle e_k$$

倘若$\widetilde{x}=x+\alpha_{n+1}e_{n+1}\in \text{span}\{e_1, \cdots e_n, e_{n+1}\}$，则原来的系数均不改变，只需要计算加入项的系数即可；

$$\alpha_{n+1}=\langle \widetilde{x}, e_{n+1}\rangle$$

下面讨论一个称为Bessel不等式的重要结果，利用它可以得到内积空间$X$中任意元$x$关于$X$中正交规范序列$\{e_n\}$作内积$\langle x, e_n\rangle$的无穷级数总是平均收敛的。

**3.4 引理** 设$X$是内积空间，$\{e_k\}$是$X$中的规范正交系，任取有限个$e_1, \cdots, e_n$，($n\in N$固定)，则

（Ⅰ）$$\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|\geqslant 0 \qquad (3)$$

（Ⅱ）对于任意$n$个数$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，总有

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\|\geqslant\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\| \qquad (4)$$

注：一般称$\langle x, e_k\rangle(k=1, 2, \cdots)$为$x$关于$\{e_k\}$的**广义Fourier系数**。

**证** 因为

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\|^2=\left\langle x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k, x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right\rangle$$

$$=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha_k}\langle x, e_k\rangle-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\langle e_k, x\rangle$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\alpha_k\overline{\alpha_m}\langle e_k, e_m\rangle$$

$$=\|x\|^2-2\text{Re}\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha_k}\langle x, e_k\rangle+\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2 \qquad (5)$$

这里，已经使用了$\{e_k\}$的规范正交性。在(5)式中，取$\alpha_k = \langle x,\ e_k\rangle$，得到

$$0 \leqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x,\ e_k\rangle e_k \right\|^2$$

$$= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n} \overline{\langle x, e_k\rangle}\langle x, e_k\rangle + \sum_{k=1}^{n} |\langle x,\ e_k\rangle|^2$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x,\ e_k\rangle|^2$$

即为(3)式。又由(5)式和(3)式，推得

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 - \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x,\ e_k\rangle e_k \right\|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \langle x,\ e_k\rangle|^2 \geqslant 0 \tag{6}$$

证得(Ⅱ)。

从(6)式知，若(4)式取等号，只有$\alpha_k = \langle x,\ e_k\rangle (k=1, 2, \cdots, n)$时才成立。它说明，用$e_1, \cdots, e_n$的线性组合来逼近$x \in X$，取 Fourier 系数时逼近最好，亦即最佳逼近。这是Fourier级数所具备的一个重要的性质。

**3.5 定理** 设$\{e_k\}$是内积空间$X$中的正交规范序列，则对于每一个$x \in X$，都有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x,\ e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad \text{(Bessel不等式)} \tag{7}$$

**证** 若$\{e_k\}$仅有有限个向量，则Bessel不等式(7)即为引理3.4中的(Ⅰ)。若$\{e_k\}$包含无限多个向量，则只须将(3)式令$n \to \infty$取极限即得。

特别，在例3.3(3°)中，Bessel不等式(7)即

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|x(t)|^2dt$$

其中$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(t)dt$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos nt\ dt$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin nt\ dt\quad(n=1,2,\cdots)$。

经过前面的讨论，已经看到，在使用中，正交规范序列是很方便的。现在，我们讨论如何将内积空间中给定的线性无关序列化为正交规范序列的问题，这是通过**Gram-Schmidt程序**实现的。这个以两人名字命名的程序，由Schmidt于1907年，Gram于1883年独立提出。

设$\{x_i\}\in x$是一个线性无关序列，而$\{e_i\}$是它的正交规范化序列，则

第一步：取$e_1=x_1/\|x_1\|$

第二步：令$v_2=x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1$，则$e_2=v_2/\|v_2\|$；

第三步：令$v_3=x_3-\langle x_3,e_1\rangle e_1-\langle x_3,e_2\rangle e_2$，则$e_3=v_3/\|v_3\|$；

……

若经过$n-1$步，已经得到$e_1,\cdots,e_{n-1}$，则

第$n$步：取$v_n=x_n-\sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n,e_k\rangle e_k$，则$e_n=v_n/\|v_n\|$

……

易知，正交规范序列$(e_1,\cdots,e_n,\cdots)$为所求。

假设$H$是Hilbert空间，$\{e_k\}$是$H$中的正交规范序列，考虑形如

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \tag{8}$$

的级数，其中$\alpha_k(k=1, 2, \cdots)$是标量。我们有下述定理。

**3.6 定理** 设$\{e_k\}$是Hilbert空间$H$中的正交规范序列，则

（Ⅰ）级数(8)收敛当且仅当级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \tag{9}$$

收敛。

（Ⅱ）如果(8)收敛，则系数$\alpha_k$是Fourier系数$\langle x, e_k\rangle$，其中$x$表示级数(8)的和，于是有

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k \tag{10}$$

（Ⅲ）对于任意的$x \in H$，$\alpha_k = \langle x, e_k\rangle$的级数(8)收敛。

**证** （Ⅰ） 设$S_n = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$，$\sigma_n = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2$，利用$\{e_k\}$的正交规范性，对任意的$m$以及$n > m$，

$$\begin{aligned}
\|S_n - S_m\|^2 &= \|(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m)\|^2 \\
&= \|\alpha_{m+1} e_{m+1} + \cdots + \alpha_n e_n\|^2 \\
&= \left\langle \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k e_k, \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i e_i \right\rangle = \sum_{i, k=m+1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_i} \langle e_k, e_i\rangle \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|^2 = |\alpha_{m+1}|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 \\
&= \sigma_n - \sigma_m
\end{aligned}$$

所以，$\{S_n\}$是$H$中Cauchy序列的充要条件是$\{\sigma_n\}$为实直线$R$中的Cauchy序列。由于$H$和$R$均完备，（Ⅰ）成立。

（Ⅱ）对于固定的$n\in N$，考虑

$$\langle S_n,\ e_i\rangle=\alpha_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)k,\leqslant n$$

由假设，$S_n\to x$，利用内积的连续性，得到

$$\alpha_i=\langle S_n,\ e_i\rangle\to\langle x,\ e_i\rangle \quad (i\leqslant k)$$

因为$n\to+\infty$，故可以把$k$取得足够大，于是，对于$i=1,\ 2\cdots$，都有$\alpha_i=\langle x,\ e_i\rangle$。

（Ⅲ）利用Bessel不等式，结论显然成立。

如果$\{e_k\}k\in I$是内积空间$X$中的一个不可数的正交规范集，那么，$X$中的任意元是否仍有展开式(10)呢？下述引理回答了这个问题。

**3.7 引理** 内积空间$X$中的任意元$x$，关于$X$中的正交规范集簇$\{e_k\}$，$k\in I$，至多有可数个非零的Fourier系数$\langle x,\ e_k\rangle$。因此，对于任意给定的元$x\in X$，总有与(10)相似的级数

$$\sum_{k\in I}\langle x,\ e_k\rangle e_k \tag{11}$$

并且，我们可以排列$\{e_k\}$使得$\langle x,\ e_k\rangle\neq 0$，于是(11)式化为(10)式，其收敛性由定理3.6得出。

**证** 由引理3.4(3)式，对于每一个给定的自然数$m$，使得$|\langle x,\ e_k\rangle|>1/m$的项数只有有限多个，又由$m$的任意性，得到引理中的第一个论断。

现在，我们只需证明级数(11)的和不依赖于$\{e_k\}$排列的次序。设$\{\omega_m\}$是$\{e_k\}$的另一排列，于是，必存在着自然数集$N\to N$的双射：$n\longmapsto m(n)$，使得两个序列的对应项相等，亦即$\omega_{m(n)}=e_n$。令$\alpha_n=\langle x,\ e_n\rangle$，$\beta_m=\langle x,\ \omega_m\rangle$，并且

$$x_1=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n,\quad x_2=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\omega_m$$

由定理3.6(Ⅱ)，$\alpha_n=\langle x, e_n\rangle=\langle x_1, e_n\rangle$，$\beta_m=\langle x, \omega_m\rangle=\langle x_2, \omega_m\rangle$，但是$e_n=\omega_{m(n)}$，于是

$$\begin{aligned}\langle x_1-x_2, e_n\rangle &= \langle x_1, e_n\rangle-\langle x_2, e_n\rangle\\ &=\langle x_1, e_n\rangle-\langle x_2, \omega_{m(n)}\rangle\\ &=\langle x, e_n\rangle-\langle x, \omega_{m(n)}\rangle=0\end{aligned}$$

同理有$\langle x_1-x_2, \omega_m\rangle=0$，所以

$$\begin{aligned}\|x_1-x_2\|^2 &= \langle x_1-x_2, \sum\alpha_n e_n-\sum\beta_m\omega_m\rangle\\ &=\sum\overline{\alpha_n}\langle x_1-x_2, e_n\rangle-\sum\overline{\beta_m}\langle x_1-x_2, \omega_m\rangle=0\end{aligned}$$

推得$x_1=x_2$，又因为$\{e_n\}$的新排列$\{\omega_m\}$的任意性，得证。

## 习　　题

1. 证明：维数为$n$的内积空间$X$，必有一组正交规范向量作成的基$\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$。

2. 如果$\{e_k\}$是内积空间$X$中的正交规范序列，$x\in X$，$y=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$，$\alpha_k=\langle x, e_k\rangle$，证明：$x-y$正交于空间$Y_n=\mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$。

3. 设$\{e_k\}$是内积空间$X$中的正交规范序列，证明：对于任意的$x$，$y\in X$，总有$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle|\leqslant\|x\|\|y\|$

4. 设$x_1(t)=t^2$，$x_2(t)=t$，$x_3(t)=1$，它们定义在区间$[-1,1]$上，按此顺序将它们正交规范化。

5. 举例说明级数$\Sigma\langle x, e_k\rangle e_k$收敛，但不以$x$为其和。

6. 证明：在Hilbert空间中，$\Sigma\|x_i\|$的收敛蕴含$\Sigma x_i$的收敛.

7. 令$\{e_n\}$和$\{\tilde{e}_n\}$都是Hilbert空间$H$中的正交规范序列，$M_1=\mathrm{span}$

$\{e_n\}$，$M_2=\text{span}\{\tilde{e}_n\}$，证明$\overline{M_1}=\overline{M_2}$，当且仅当

（Ⅰ）$e_n=\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\tilde{e}_m$，（Ⅱ）$\tilde{e}_n=\sum_{m=1}^{\infty}\overline{a_{mn}}\,e_m$，其中$a_{n,m}=\langle e_n,\tilde{e}_m\rangle$。

## §4　完全正交系与Parseval等式

在Hilbert空间$H$中，由Bessel不等式，得出元$x\in H$关于正交规范序列$\{e_k\}\in H$的Fourier系数$\langle x, e_k\rangle$作成的级数是平均收敛的，由此，推出一系列结论。但是，一般说来，仍得不到$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2$，这是因为$\{e_k\}$的个数有时仍旧不够"多"，因此，用正交规范序列的线性组合还不能准确替代元$x$。当然，在有限维($n$维)空间中，所有由$n$个元组成的正交规范集都合于要求，问题在于无限维空间中有怎样的结果呢？

**4.1　定义**　赋范空间$X$中的**完全集**（也称**基本集**）是子集$A\in X$，它的生成空间在$X$中稠。如果$X$是内积空间，正交规范集（序列或集簇）$\{e_k\}\in X$是$X$中的完全集，则称$\{e_k\}$为$X$中的**完全正交规范集（序列或集簇）**。

显然，在赋范空间$X$中，$A$是完全集当且仅当$\overline{\text{span}A}=X$。

内积空间$X$中的一个完全正交规范集有时又叫作$X$的正交规范基。值得注意的是，这绝不是线性空间中代数意义下的基，除非$X$是有限维空间。

**在每一个Hilbert空间$H\neq\{0\}$中，总存在着完全正交规范集。**

对于有限维空间$H$，这是显然的。对于无限维可分的$H$，则可以从由Gram-Schmidt程序断定。而对于无限维不可分的$H$，一个（非构造性的）证明依赖于Zorn引理。

在给定的Hilbert空间$H\neq\{0\}$中，所有的完全正交规范集有相同的基数，称为**Hilbert维数**或$H$的正交维数。如果$H=\{0\}$，此维数定义成零。

这个论断对于有限维空间$H$是显然的，因为此时Hilbert维数就是代数意义下的维数。如果$H$是无限维可分空间，此论断可以从定理4.4得出。而对于一般的$H$，需要集论中更加优越的工具，这里不讨论。

下面的定理揭示了“完全性”的本质含义。

**4.2 定理** 设$A$是内积空间$X$的子集，则

（Ⅰ） 如果在$X$中，$A$是完全集，则不存在非零元$x\in X$，使得$x$正交于$A$.亦即，如果有

$$x\perp A\Longrightarrow x=0 \tag{1}$$

（Ⅱ） 如果空间$X$完备，则条件（1）对于$A$在$X$中的完全性是充分的。

**证** （Ⅰ） 设$H$是$X$的完备化空间，则$X$视为$H$的子空间在$H$中稠。依假设$A$是$X$中的完全集，则span$A$在$X$中稠，因此也在$H$中稠。由定理2.13，推得在$H$中，$A^{\perp}=\{0\}$。于是，如果$x\in X$且$x\perp A$，必有$x=0$。

（Ⅱ） 如果$X$完备，子集$A\subset X$满足（1）式，由定理2.13蕴含$A$在$X$中是完全集。

在定理4.2（Ⅱ）中，$X$的完备性是本质的。如果$X$不完备，则条件（1）对于正交规范子集$A$成立，但$A$可以不是完全集。I.Dixmiex在1953年，而N.Bourbaki在1955年都给出了这样的例子。

关于完全性的另一个判定准则与Bessel不等式有关。假设$A$是Hilbert空间$H$中任意正交规范集，由引理3.7知道：任意元$x\in H$，至多有可数非零的Fourier系数，于是，可以将它们排出一个顺序$\langle x,e_1\rangle$，$\langle x,e_2\rangle$，…，则Bessel不等式化为

$$\sum_k |\langle x,e_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2 \tag{2}$$

（2）式左端是个无穷级数或有限和。（2）式取等号，成为

$$\sum_k |\langle x,e_k\rangle|^2=\|x\|^2 \quad (\text{Parseval等式}) \tag{3}$$

**4.3 定理** Hilbert空间$H$中的正交规范集$A$在$H$中是完全的充要条件是对于任意的$x\in H$，Parseval等式（3）成立。

**证** 如果$A$不是$H$中的完全集，由定理4.2，必有$0\neq x\in H$，且$x\perp A$，于是，对于（3）式中所有的$k$，都有$\langle x,e_k\rangle=0$，所以（3）式左端等于零，但$\|x\|^2\neq 0$，故（3）式不能成立。这就证明了充分性。

反之，设集$A$是空间$H$中的完全集。对于任意的$x\in H$，我们已排好非零Fourier系数为$\langle x,e_k\rangle$，$(k=1,2,\cdots)$，定义

$$y=\sum_k\langle x,e_k\rangle e_k \tag{4}$$

下证$x-y\perp A$，对于出现在（4）式中的每一个给定的$e_i$，利用$\{e_k\}$的正交规范性，有

$$\langle x-y, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \langle y, e_i\rangle$$

$$= \langle x, e_i\rangle - \left\langle \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k, e_i\right\rangle$$

$$= \langle x, e_i\rangle - \sum_k \langle x, e_k\rangle\langle e_k, e_i\rangle$$

$$= \langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle = 0$$

显然，对于未排进来的$A$中的其它任意元$u$，必有$\langle x, u\rangle = 0$，因此也有

$$\langle x-y, u\rangle = \langle x, u\rangle - \sum_k \langle x, e_k\rangle\langle e_k, u\rangle = 0 - 0 = 0$$

所以，推得$x-y\perp A$，则$x-y\in A^{\perp}$。但是，$A$是$H$中的完全集，由定理2.13，$A^{\perp}=\{0\}$，蕴含着$x-y=0$，于是$x=y$。利用（4）式，推出

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_m\rangle e_m \right\rangle$$

$$= \sum_{k,\ m=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle \overline{\langle x, e_m\rangle} \langle e_k, e_m\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$$

如果$H$是可分的Hilbert空间，则有更简单的结果。

**4.4 定理** 设$H$是Hilbert空间，

（Ⅰ） 如果$H$可分，则$H$中的任意正交规范集是可数的；

（Ⅱ） 如果$H$包含的正交规范序列在$H$中是完全的，则$H$是可分的。

**证** （Ⅰ） 设$H$可分，$B$是$H$中的任意稠子集，$A$是任意正交规范集，则$A$中的任意两个不同的元$x$，$y$，其距离为$\sqrt{2}$。所以，以$x$和$y$为中心，以$\sqrt{2}/3$为半径的邻域（开球）$N_x$和$N_y$不相交。因为$B$在$H$中稠，必有$b\in B$，$\tilde{b}\in B$，且$b\in N_x$和$\tilde{b}\in N_y$，并且$b\neq\tilde{b}$，又$N_x\cap N_y=\phi$，如果$A$不可数，则因为我们将有不可数个两两不相交的邻域，所以，$B$必不可数。由$B$的任意性，说明$H$不可以包含可数稠集，与$H$的可分性矛盾。故$A$可数。

（Ⅱ） 设$\{e_K\}$是空间$H$中的完全正交规范序列，$A$是全体线性组合

$$\beta_1^{(n)}e_1+\cdots\beta_n^{(n)}e_n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

集，其中$\beta_k^{(n)}=a_k^{(n)}+ib_k^{(n)}$，而$a_k^{(n)}$，$b_k^{(n)}\in Z$，这里$Z$表有理数集（如果$H$是实空间，则$b_k^{(n)}=0$）。显然集合$A$是可数的，下证$A$在$H$中稠。这归结为对于任意的$x\in H$和任给的$\varepsilon>0$，存在着$u\in A$，使得$\|x-u\|<\varepsilon$。

因为序列$\{e_k\}$在$H$中是完全的，必有自然数$n$，使得$Y_n=\text{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$有元$y\in Y_n$，

$$y=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$$

有$\|x-y\|<\varepsilon/2$，于是，有

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

但是，$\overline{Z}=R$，对于每一个$\langle x,e_k\rangle$，存在具有有理实部和有理虚部的复数$\beta_k^{(n)}$，使得

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\left(\langle x, e_k\rangle - \beta_k^{(n)}\right)e_k\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

令$u = \sum_{k=1}^{n}\beta_k^{(n)}e_k$，则$u \in A$，推得

$$\|x-u\| = \left\|x - \sum_{k=1}^{n}\beta_k^{(n)}e_k\right\|$$

$$\leqslant \left\|x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_K\rangle e_k\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n}\beta_k^{(n)}e_k\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

两个同域上的Hilbert空间$H$与$\widetilde{H}$之间的同构映射是一个双射线性算子$T$：$H \to \widetilde{H}$，并且使得对于任意$x$，$y \in H$，都有

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \tag{5}$$

因此，$T$还是等距算子。此时，也称$H$与$\widetilde{H}$是彼此同构的。

**4.5 定理**（Riesz-Fischer） 设$H$是Hilbert空间，$\{e_k\}$是$H$中的正交规范序列，$\{\alpha_k\} \in l^2$，则存在唯一的元$x \in H$，使得$\alpha_k = \langle x, e_k\rangle$ $(k = 1, 2, \cdots)$，并且Parseval等式

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$$

成立。

**证** 设$x_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$，下证$\{x_n\}$是$H$中的 Cauchy 序列。对于任意的自然数$m$，$n$（令$m>n$），利用$\{e_k\}$的正交规范性，有

$$\|x_m-x_n\|^2=\left\|\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k e_k\right\|^2=\sum_{k=n+1}^{m}|\alpha_k|^2,$$

因为数列$\{\alpha_k\}\in l^2$，级数$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$收敛，因此当$m,n\to\infty$时，

$$\sum_{k=n+1}^{m}|\alpha_k|^2\to 0,\ \text{即}\|x_m-x_n\|^2\to 0$$

说明$\{x_n\}$是$H$中的Cauchy序列。由$H$的完备性，存在唯一的元$x\in H$，使得$x_n\to x$（$n\to\infty$）。又由定理3.6（Ⅱ）知$\alpha_k$就是这个$x$关于$\{e_k\}$的Fourier系数。再利用$\|x-x_n\|\to 0$（$n\to\infty$），蕴含对此$x$，Parseval等式成立。

有了上面的种种准备之后，我们可以证明Hilbert空间的一个重要特性——所有的可分Hilbert空间都同构。

**4.6 定理** 任何可分的Hilbert空间$H$均与$l^2$空间同构，因此，所有可分的Hilbert空间彼此同构。

**证** 设$\{e_k\}$是空间$H$中的完全正交规范序列，$x$是$H$内的任意元，则

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$$

其中$\alpha_k=\langle x,e_k\rangle$（$K=1,2,\cdots$），由定理4.3，必有

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2。$$

令$\tilde{x}=(\alpha_k)$，由Parseval等式（3），蕴含$\tilde{x}\in l^2$，作映射$T$：$H\longrightarrow l^2$，亦即$Tx=(\alpha_k)=\tilde{x}$，则对于

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e_k=\sum_{k=1}^{\infty}\langle y,e_k\rangle e_k\in H,\qquad \tilde{y}=(\beta_k)$$

映射$T$具备下述性质：

（Ⅰ）若$Tx=\tilde{x}$，$Ty=\tilde{y}$，则$T(\alpha x+\beta y)=\alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y}=\alpha Tx+\beta Ty$。

（Ⅱ）

$$\langle x,y\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k,\ \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m e_m\right\rangle=\sum_{k,\ m=1}^{\infty}\alpha_k\overline{\beta_m}\langle e_k,e_m\rangle$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\overline{\beta_k}=\langle\tilde{x},\tilde{y}\rangle=\langle Tx,Ty\rangle$$

因此，映射$T$是$H\rightarrow l^2$的保内积线性映射。

另一方面，任取$\{\alpha_k\}\in l^2$，由定理4.5，在$H$中必存在唯一的元$x$以$\alpha_k$（$k=1,2,\cdots$）为其Fourier系数，于是在映射$T$下，$x$在$l^2$中的对应元素就是$(\alpha_k)$，所以$T$是$H$到$l^2$上的映射，即$T(H)=l^2$。显然，$T$也是$H$到$l^2$上的双射，因此，$T$是同构映射。亦即$H$与$l^2$同构。

至于所有可分Hilbert空间同构是上述结果的直接推论。

## 习　　题

1．如果$F$是内积空间$X$中的一组正交规范基，那么，可以将每个

元$x\in X$表成$F$的元的线性组合吗?

2. 从Parseval等式(3)推证下述公式(常称为Parseval关系):

$$\langle x,y\rangle=\sum_k\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}$$

3. 证明:Hilbert空间$H$中的一个正交规范集簇$\{e_k\}$, $k\in I$, 是完全的,当且仅当上题定义的Parseval关系对空间$H$中的任意元$x,y$成立。

4. 证明:如果Hilbert空间是可分的,则$H$中存在着完全规范序列。

5. 设$H$是可分Hilbert空间,$A$是H中的可数稠集,证明:$H$包含着的一个完全正交规范序列可以由$A$经Gram,-Schmidt程序而得出。

6. 设A是内积空间X的完全集,若$\langle u,x\rangle=\langle v,x\rangle$对于一切$x\in A$成立,证明$u=v$。

7. 设$A$是Hilbert空间$H$的子集,$u$, $v\in H$,若对于一切$x\in A$, $\langle u,x\rangle=\langle v,x\rangle$蕴含$u=v$,如果此关系对于全体$u$, $v\in H$成立,证明$A$是$H$中的完全集。

## §5 几种正交多项式

Hilbert空间的理论在分析的多种课题中都有应用。本节讨论在数学物理中有着重要应用的三类完全正交规范或正交规范序列,这就是被称为特殊函数的Legendre、Hermite、Laguerre正交多项式。

**5.1 Legendre多项式** 区间$[-1,1]$上全体连续实值函数作成的空间记为$X$,其上的内积定义成$\langle x,y\rangle=\int_{-1}^{1}x(t)y(t)dt$,将此内积空间完备化,得到一个Hilbert空

间，记为$L^2[-1, 1]$。现在，我们要具体找出空间$L^2[-1,1]$的一个完全正交规范序列。显然，对于$t\in[-1,1]$，

$$x_i(t)=t^i(i=0,1,2\cdots) \tag{1}$$

是$L^2[-1, 1]$中的线性无关集。应用Gram-Schmidt 程序，必然得到一个正交规范集 $(e_n)$，其中每个$e_n$都是一个多项式，因为在程序中$e_n$都是$x_i$的线性组合。我们还有结论：

**在$L^2[-1, 1]$中，$(e_n)$是完全的。**

**证** 由定理1.7知，$W=A(X)$在$L^2[-1, 1]$中稠，其中$A: X\to L^2[-1, 1]$。所以，对于任意固定的$x\in L^2[-1, 1]$和任给的$\varepsilon>0$，存在着定义在$[-1, 1]$上的连续函数y，使得

$$\|x-y\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

由Weierstrass逼近定理，对这个$y(t)$，必存在多项式$z(t)$，使得对于全体$t\in[-1, 1]$，有

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}\left|y(t)-z(t)\right|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$$

所以，

$$\|y-z\|^2=\langle y-z, y-z\rangle=\int_{-1}^{1}|y(t)-z(t)|^2dt$$

$$<2\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\varepsilon^2}{4}$$

于是，$\|x-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，从（1）式以

及Gram-Schmidt 程序知，存在着充分大的 $m$，使得 $z\in \text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，由$x$的任意性，以及完全性的定义，（$e_n$）是完全的。

为了实际应用的目的，我们需要具体清晰的表达式，为此，取

$$e_n(t)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(t)\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{2}$$

其中

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right], \tag{3}$$

称$P_n(t)$为$n$次Legendre多项式，（3）式叫Rodrigue公式。在（2）式中取平方根，是为了$P_n$（1）=1。用Newton二项式定理展开（$t^2-1)^n$，得到

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k t^{2n-2k}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n\cdot k!(n-k)!(n-2k)!}t^{n-2k} \tag{4}$$

当$2k>n$时，各阶导数都是零，于是当$n$为偶数时，$N=n/2$；当$n$为奇数时，$N=(n-1)/2$（图4-3）。

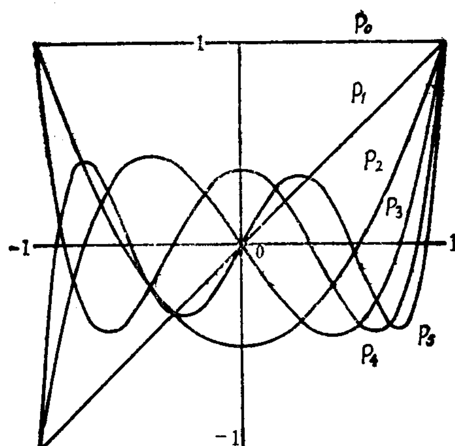



图4-3 Legendre多项式

所以，

$$P_0(t)=1, \qquad P_1(t)=t,$$

$$P_2(t)=\frac{1}{2}(3t^2-1), \qquad P_3(t)=\frac{1}{2}(5t^3-3t), \tag{5}$$

$$P_4(t)=\frac{1}{8}(35t^4-30t^2+3), \quad P_5(t)=\frac{1}{8}(63t^5-70t^3+15t)$$

$$\cdots\ \cdots \qquad\qquad \cdots\ \cdots$$

等等。代入（2）式，得到

$$e_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad e_1(t)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,t,$$

$$e_2(t)=\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{2}(3t^2-1),$$

$$e_3(t)=\sqrt{\frac{7}{2}}\cdot\frac{1}{2}(5t^3-3t), \tag{6}$$

$$e_4(t)=\sqrt{\frac{9}{2}}\cdot\frac{1}{8}(35t^4-30t^2+3),$$

$$e_5(t)=\sqrt{\frac{11}{2}}\cdot\frac{1}{8}(63t^5-70t^3+15t),$$

$$\cdots\ \cdots\qquad\cdots\ \cdots$$

根据（2）、（3）式以及（5）式，我们得到序列 $\{e_n(t)\}$，这时必须证明（6）式决定的是$L^2[-1, 1]$中的完全正交规范序列。

（2）和（3）式的证明分三步进行。

第一步：证明 $\{e_k(t)\}$ 是规范的，即$\|e_n\|=1$。记$u=t^2-1$，则当$t=\pm1$时，函数$u^n$和其$n-1$阶导数都为零。但是，$(u^n)^{(2n)}=(2n)!$，分部积分$n$次，有

$$(2^n n!)^2\|P_n\|^2=(2^n n!)^2\langle P_n,P_n\rangle$$

$$=(2^n n!)^2\left\langle \frac{1}{2^n n!}(u^n)^{(n)},\ \frac{1}{2^n n!}(u^n)^{(n)}\right\rangle$$

$$=\int_{-1}^{1}(u^n)^{(n)}\cdot(u^n)^{(n)}dt=(u^n)^{(n-1)}(u^n)^{(n)}\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(u^n)^{(n-1)}(u^n)^{(n+1)}dt$$

$$=-\int_{-1}^{1}(u^n)^{(n-1)}(u^n)^{(n+1)}dt=(-1)\Big[(u^n)^{(n-2)}(u^n)^{(n+1)}\Big|_{-1}^{1}-$$

$$\int_{-1}^{1}(u^n)^{(n-2)}(u^n)^{(n+2)}dt\Big]$$

$$=(-1)^2\int_{-1}^{1}(u^n)^{(n-2)}(u^n)^{(n+2)}dt=\cdots\ \cdots$$

$$=(-1)^n\int_{-1}^{1}u^n(u^n)^{(2n)}dt=(-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}u^n dt$$

$$=2(2n)!\int_0^1(1-t^2)^n dt$$

$$\underline{\underline{t=\sin\tau}}\ 2(2n)!\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\tau d\tau=\frac{2(2n)!(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$=\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$$

所以，推得$\|P_n\|=\sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$于是$\|e_n\|=1(n=0,1,2\cdots)$

第二步：证明$\{e_n(t)\}$的正交性，这归结为证明$\{P_n\}$的正交性，亦即对任意非负整数$n,m$，且$n\neq m$，不妨设$m<n$，有$\langle P_m,P_n\rangle=0$，由于$P_m$是一个$m$次多项式，必可写成

$$P_m=a_0+a_1t+\cdots+a_mt^m=a_0x_0+a_1x_1+\cdots+a_mx_m$$

利用内积线性性质，这只需证明$\langle x_m,P_n\rangle=0$。分部积分$n$次，则有

$$2^n n!\langle x_m, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} t^m (u^n)^{(n)} dt$$

$$= t^m (u^n)^{(n-1)} \Big|_{-1}^{1} - m\int_{-1}^{1} t^{m-1}(u^n)^{(n-1)} dt$$

$$= (-1)m\int_{-1}^{1} t^{m-1}(u^n)^{(n-1)} dt$$

$$= (-1)m\left[t^{m-1}(u^n)^{(n-1)}\Big|_{-1}^{1}\right.$$

$$\left. - (m-1)\int_{-1}^{1} t^{m-2}(u^n)^{(n-2)} dt\right]$$

$$= (-1)^2 m(m-1)\int_{-1}^{1} t^{m-2}(u^n)^{(n-2)} dt$$

$$= \cdots \cdots$$

$$= (-1)^m \cdot m!\int_{-1}^{1} (u^n)^{(n-m)} dt$$

$$= (-1)^m \cdot m!\ (u^n)^{(n-m-1)}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

第三步：证明$\{e_n(t)\}$是完全的。这只需证明由$\{x_0, x_1, \cdots, x_n \cdots\}$，其中$x_i = t^i$，$t \in [-1, 1]$经过Gram-Schmidt程序所得到的正交规范序列$\{e_n(t)\}$与$\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}} P_n(t)$是一致的，这里$P_n(t)$表$n$次Legendre多项式。

令 $y_n(t) = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}} P_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$，由前两步证

明知$\{y_n(t)\}$必是空间$L^2[-1, 1]$中的正交规范序列，但是$\{e_n(t)\}$是集$(t^k)$经Gram-Schmidt程序得出的，于是

$$Y_n = \text{span}\{e_0, \cdots, e_n\} = \text{span}\{x_0, \cdots, x_n\}$$

又因$\dim Y_n = n+1$，且$\{y_0, \cdots, y_n\}$线性无关，于是$y_0, \cdots, y_n$是$Y_n$中的一组基，因此

$$Y_n = \text{span}\{e_0, \cdots, e_n\} = \text{span}\{x_0, \cdots, x_n\} = \text{span}\{y_0, \cdots, y_n\}$$

所以，有表示式

$$y_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \tag{7}$$

由正交性，

$$y_n \perp Y_{n-1} = \text{span}\{y_0, \cdots, y_{n-1}\} = \text{span}\{e_0, \cdots, e_{n-1}\}$$

蕴含着，对于$k = 0, 1, \cdots, n-1$,

$$0 = \langle y_n, e_k \rangle = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_k \rangle = \alpha_k$$

（7）式化为$y_n = \alpha_n e_n$，因为$\|y_n\| = \|e_n\| = 1$，于是$|\alpha_n| = 1$。实际上，只有$\alpha_n = 1$或$\alpha_n = -1$，这是由于$y_n$和$e_n$皆是实的。对于充分大的$t$，$y_n(t) > 0$，这不难从（4）式看出。另一方面，由于$t^n$的系数大于零，从$e_n(t)$的作法，推得$e_n(t) > 0$。于是，$\alpha_n > 0$，因而$\alpha_n = 1$，故有$y_n = e_n$。

Legendre多项式是重要的Legendre微分方程

$$(1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0 \tag{8}$$

的解，（4）式也可通过对方程（8）应用幂级数方法求解而得到。

一般地，空间$L^2[a,b]$中的完全正交规范序列$\{g_n(t)\}$为

$$g_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}, \quad P_n(t) = P_n(s), \quad s = 1 + 2\frac{t-b}{b-a} \tag{9}$$

只要注意区间$a \leqslant t \leqslant b$对应于$-1 \leqslant s \leqslant 1$，而正交性在线性变换$t \longmapsto s$之下仍旧保持，结论是显然的。于是，有下述重要结论：**实$L^2[a,b]$空间是可分的。**

如果把区间$[a,b]$换成任意紧区间，结论仍成立。

**5.2 Hermite多项式** 在实践中同样有重要应用的空间还有$L^2(-\infty, +\infty)$，$L^2[a, +\infty)$和$L^2(-\infty, b]$，显然，因为积分区间是无穷区间，5.1没有包括这几种情形。

这里，我们只考虑实的$L^2(-\infty, +\infty)$空间，其上的内积定义成

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t) dt$$

应用Gram-Schmidt程序于给定的函数列：

$$w(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad tw(t), \quad t^2 w(t), \cdots$$

乘上因子$w(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$的目的是为了使得每一项的范数有限，则对于所有的$t \in (-\infty, \infty)$，有

$$|t^n w(t)| = |t^n e^{-\frac{t^2}{2}}| \leqslant K_n$$

并且

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot t^n e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right| \leqslant K_{m+n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$= \sqrt{2\pi} K_{m+n}$$

经过正交规范化，得到正交规范序列$\{e_n(t)\}$，其中

$$e_n(t) = \frac{1}{(2^n n!\ \sqrt{\pi})^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\ H_n(t) \tag{10}$$

并且

$$H_0(t) = 1,\ H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}), n = 1, 2, \cdots \tag{11}$$

我们称$H_n$为$n$次Hermite多项式（图4-4）。

在（11）式中，求$n$阶导数，得到

$$H_n(t) = n! \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \frac{2^{n-2i}}{i!\ (n-2i)!} t^{n-2i} \tag{12}$$

其中

$$N = \begin{cases} \frac{n}{2}, & 若n是偶数; \\ \frac{n-1}{2}, & 若n是奇数。 \end{cases}$$

我们也有

$$H_n(t) = \sum_{i=0}^{N} \frac{(-1)^i}{i!} n(n-1) \cdots (n-2i+1)\ (2t)^{n-2i} \tag{13}$$

它的前6项为

$H_0(t) = 1,$ $\qquad$ $H_1(t) = 2t,$

$H_2(t) = 4t^2 - 2,$ $\qquad$ $H_3(t) = 8t^3 - 12t,$

$H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12,$ $\qquad$ $H_5(t) = 32t^5 - 160t^3 + 120t,$

…… $\qquad$ ……

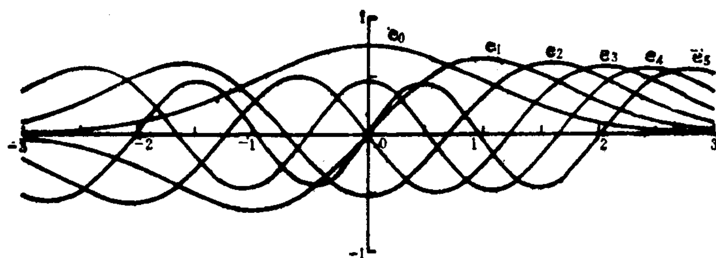



图4-4 Hermiet多项式

下面，我们必须证明，(10)式决定了一个正交规范序列$\{e_n\}$.

**证** 只需证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(t) H_n(t) dt = \begin{cases} 0, & 若 m \neq n; \\ 2^n \cdot n! \sqrt{\pi}, & 若 m = n。\end{cases}$$

对（13）式求导，当$n \geqslant 1$时，得到

$$H_n'(t) = 2n \sum_{i=0}^{M} \frac{(-1)^i}{i!} (n-1)(n-2)\cdots(n-2i)(2t)^{n-1-2i}$$

$$= 2nH_{n-1}(t) \tag{14}$$

其中

$$M = \begin{cases} \dfrac{n-2}{2}, & 当 n 为偶数时; \\ \\ \dfrac{n-1}{2}, & 当 n 为奇数时。\end{cases}$$

如果$m \leqslant n$，并记$e^{-t^2/2}$为$\upsilon$，对（12）式进行$m$次分部积分，推得

$$(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}H_m(t)H_n(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(t)v^{(n)}dt$$

$$=H_m(t)v^{(n-1)}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}2mH_{m-1}(t)\ v^{(n-1)}dt$$

$$=\ -2m\int_{-\infty}^{+\infty}H_{m-1}\ (t)\ v^{(n-1)}dt$$

$$=\qquad\cdots\cdots\cdots$$

$$=(-1)^m2^m m!\ \int_{-\infty}^{+\infty}H_0(t)v^{(n-m)}dt$$

$$=\begin{cases}0, & 若n>m;\\ \sqrt{\pi}, & 若n=m。\end{cases}$$

这里，使用了$H_0(t)=1$，以及当$t\longrightarrow\pm\infty$时，$\nu$和它的导数均趋于零这样显然的事实。

容易证明，由（10）和（11）式决定的$\{e_n\}$是实空间$L^2(-\infty, +\infty)$中完全正交规范序列，因此，该空间是可分的。

同理，Hermite多项式$H_n$是Hermite微分方程

$$H_n''-2tH_n'+2nH_n=0 \qquad (15)$$

的解。

Hermite多项式的一个应用是在量子力学方面。

**5.3 Laguerre多项式** 在$L^2[0, +\infty)$空间中，应用Gram-Schmidt程序于序列

$$e^{-\frac{t}{2}},\quad te^{-\frac{t}{2}},\quad t^2e^{-\frac{t}{2}},\ \cdots$$

则得到$L^2[0, +\infty)$中的一个正交规范序列$\{e_n\}$，还可以进一步证明它是完全的。并且

$$e_n(t)=e^{-\frac{1}{2}t}L_n(t),\quad (n=0,1,2,\cdots) \qquad (16)$$

其中$n$阶Laguerre多项式定义成

$$L_0(t) = 1$$

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

(17)

或者

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} C_n^i t^i \tag{18}$$

Laguerre多项式的前几项为

$$L_0(t) = 1, \qquad L_1(t) = 1 - t,$$

$$L_2(t) = 1 - 2t + \frac{1}{2}t^2, \quad L_3(t) = 1 - 3t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3,$$

$$L_4(t) = 1 - 4t + 3t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{24}t^4,$$

……

同理，Laguerre多项式$L_n$亦可从同名微分方程

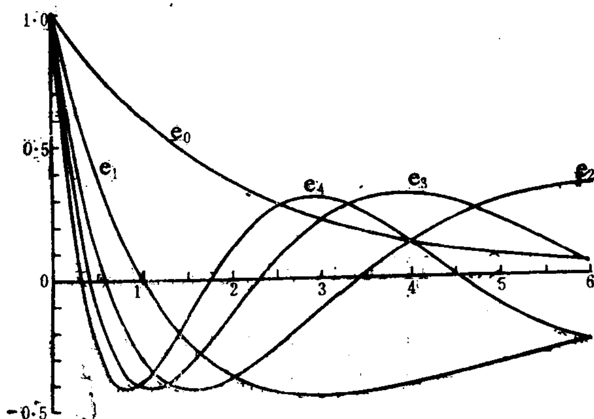



图4-5　Laguerre多项式

$$tL_n'' + (1-t)L_n' + nL_n = 0 \tag{19}$$

求幂级数解而得出（图4-5）。

## 习　　题

1.证明：Legendre微分方程可以写成下述形式，

$$\left[(1-t^2)P_n'\right]' = -n(n+1)P_n$$

用$P_m$乘此方程，又用$-P_n$乘相应于$P_m$的方程，将此二方程相加，再从$-1$到$+1$积分，证明：$(P_n)$是空间$L^2[-1,1]$中的正交序列。

2.证明：$\dfrac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)w^n$

左端函数称为Legendre多项式$P_n(t)$的生成函数。

3. 利用(11)式证明

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H_n'(t)$$

4. （生成函数）利用(18)式，证明

$$\psi(t, w) = \frac{1}{1-w}\exp\left[-\frac{tw}{1-w}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)w^n$$

5. 利用对上题的$\psi$求关于$w$的导数，证明：

（Ⅰ）$(n+1)L_{n+1}(t) - (2n+1-t)L_n(t) + nL_{n-1}(t) = 0$

求$\psi$关于$t$的导数，证明

（Ⅱ）$L_{n-1}(t) = L'_{n-1}(t) - L'_n(t)$。

# §6 Hilbert空间泛函的表示

研究和了解各种空间上有界线性泛函的一般形式是十分重要的，这一点在第三章的学习中已经看到。对于一般的Banach空间，这个问题有时是很复杂的，然而，在Hilbert空间中则有十分简单的结果。粗略说来，就是有界线性泛函

总可以借助于内积表示。

**6.1 定理（Riesz）** Hilbert空间$H$中的每一个有界线性泛函$f$都可以用内积表示，对于一切的$x\in H$，

$$f(x)=\langle x,z\rangle \tag{1}$$

其中$z$依赖于$f$，由$f$唯一决定，并且

$$\|z\|=\|f\| \tag{2}$$

**证** 证明分三步进行：

（Ⅰ） $f$有表示式(1)。如果$f=0$，只须取$z=0$，则(1)，(2)式必成立。不妨设$f\neq 0$，则$\mathcal{N}(f)=\{x\in H|_{f(x)=0}\}$，由第三章定理6.3和推论7.6知，$\mathcal{N}(f)$是闭线性空间。因为$f\neq 0$蕴含$\mathcal{N}(f)\neq H$，因此，由投影定理2.9，$\mathcal{N}(f)^{\perp}\neq\{0\}$，所以，必有$z_0\in\mathcal{N}(f)^{\perp}$，且$z_0\neq 0$，使得$f(z_0)\neq 0$，对于任意的$x\in H$，令

$$v=f(x)z_0-f(z_0)x$$

则$f(v)=f(x)f(z_0)-f(z_0)f(x)=0$，亦即$v\in\mathcal{N}(f)$，所以

$$\begin{aligned}0&=\langle v,z_0\rangle=\langle f(x)z_0-f(z_0)x,z_0\rangle\\&=f(x)\langle z_0,z_0\rangle-f(z_0)\langle x,z_0\rangle\end{aligned}$$

但是，$\|z_0\|\neq 0$，因此

$$f(x)=\frac{f(z_0)}{\langle z_0,z_0\rangle}\langle x,z_0\rangle=\langle x,\ \overline{\frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}}z_0\rangle=\langle x,z\rangle$$

其中$z=\overline{\dfrac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}}z_0$。因为$f\neq 0$是任意有界线性泛函，以及$x\in H$的任意性，（1）式成立。

（Ⅱ）（1）式中的$z$由$f$唯一决定。假设对于任意的$x\in H$，有

$$f(x)=\langle x,z_1\rangle=\langle x,z_2\rangle$$

则$\langle x, z_1 - z_2\rangle = 0$对所有$x$成立，特别取$x = z_1 - z_2$，得到

$$\langle z_1 - z_2, z_1 - z_2\rangle = \|z_1 - z_2\|^2 = 0$$

因此，$z_1 - z_2 = 0$，$z_1 = z_2$。

（Ⅲ） 证明（2）式成立。若$z = 0$，则（2）式成立。设$f \neq 0$，则有$z \neq 0$，由（1）式，取$x = z$，有

$$\langle z, z\rangle = \|z\|^2 = f(z) \leqslant \|f\|\|z\|,$$

两端除以$\|z\|$，得到$\|z\| \leqslant \|f\|$。另一方面，由Schwarz不等式，

$$|f(x)| = |\langle x, z\rangle| \leqslant \|x\|\|z\|$$

所以

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|z\|$$

Riesz表示定理是一个极为基本、极为重要的定理，它有重要的理论价值和实际应用。这里，我们利用它，将得到Hilbert空间的一个重要特性——自共轭性。

作Hilbert空间$H$到其对偶空间$H'$的映射

$$C: H \longrightarrow H'$$

$$z \longmapsto f_z = \langle x, z\rangle$$

Riesz定理6.1说明映射$C$是双射，并且是保范的，即$\|C(z)\| = \|z\|$，对于任意的$\alpha, \beta \in K$，$x, y, z \in H$，

$$f_{\alpha y + \beta z}(x) = \langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$$

$$= \overline{\alpha} f_y(x) + \overline{\beta} f_z(x)$$

亦即：$C(\alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} C(y) + \overline{\beta} C(z)$，说明映射$C$是共轭线性映射，合起来知，$C$是$H \to H'$上的共轭同构映射。所以，我们说Hilbert空间$H$和它的对偶空间$H'$是同构的，也

称$H$为自共轭空间。利用这个观点来理解子集$\phi \neq A \subset H$的零化子$A^{\perp}$就是很自然的。

**6.2 引理** 对于内积空间$X$中的全体$w$，如果成立着$\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle$，则$v_1 = v_2$，特别，对于全体$w \in X$，都有$\langle v, w\rangle = 0$，则$v = 0$.

**证** 由假设，对于所有的$w \in X$，

$$\langle v_1 - v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle - \langle v_2 - w\rangle = 0$$

特别，当$w = v_1 - v_2$时，得出$\|v_1 - v_2\|^2 = 0$，因此$v_1 - v_2 = 0$，$v_1 = v_2$。

特别，若$\langle v, w\rangle = 0$，取$w = v$，必有$v = 0$。

为了给以后的章节作准备，下面讨论在实际应用中极重要的概念：半双线性型。

**6.3 定义** 设$X$和$Y$是域$K$上的线性空间，则$X \times Y$上的**半双线性型**（或**半双线性泛函**）$h$是映射

$$h: X \times Y \longrightarrow K$$

使得对于所有的$x, x_1, x_2 \in X$，$y, y_1, y_2 \in Y$以及任意$\alpha, \beta \in K$，下列各式成立。

$$\begin{aligned}
&(\text{I}) \quad h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y);\\
&(\text{II}) \quad h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2);\\
&(\text{III}) \quad h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y);\\
&(\text{IV}) \quad h(x, \beta y) = \overline{\beta} h(x, y)。
\end{aligned} \tag{3}$$

因为映射$h$对于第一个变量是线性的，对第二个变量是共轭线性的，故称$h$为半双线性的。如果$K = R$，则（IV）化为$h(x, \beta y) = \beta h(x, y)$，这时，称$h$为双线性型。

如果$X$和$Y$都是赋范空间，而且存在着正实数$C$，使得

$$|h(x, y)| \leqslant C\|x\|\|y\| \tag{4}$$

对于任意$x\in X$，$y\in Y$成立，则称$h$是**有界半双线性型**，并且

$$\sup_{\substack{x\in X-\{0\}\\ y\in Y-\{0\}}}\frac{|h(x,y)|}{\|x\|\|y\|}=\sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}}|h(x,y)|=\|h\| \tag{5}$$

称为$h$的**范数**。

从（4），（5）式，还有

$$|h(x,y)|\leqslant\|h\|\|x\|\|y\| \tag{6}$$

显然，内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$就是一个有界半双线性型。

**6.4 定理** 设$H_1$和$H_2$都是域$K$上的Hilbert空间，$h$：$H_1\times H_2\longrightarrow K$是一个有界半双线性型，则$h$有表示

$$h(x,y)=\langle Sx,y\rangle$$

其中$S$：$H_1\longrightarrow H_2$是有界线性算子，由$h$唯一确定，并且

$$\|S\|=\|h\| \tag{8}$$

**证** 因为$h$：$H_1\times H_2\longrightarrow K$是有界半双线性型，对于任意$x\in H_1$，$y\in H_2$，$h(x,y)$关于$x$线性，关于$y$共轭线性，于是$\overline{h(x,y)}$关于$y$必是线性的。固定$x\in H_1$，则$\overline{h(x,y)}$是空间$H_2$上的线性有界泛函，由定理6.1，有表示$\overline{h(x,y)}=\langle y,z\rangle$，其中$z\in H_2$是唯一确定元，于是

$$h(x,y)=\overline{\langle y,z\rangle}=\langle z,y\rangle \tag{9}$$

但显然$z$应依赖于$x\in H_1$，所以（9）式说明必有一算子$S$：$H_1\longrightarrow H_2$，由$z=Sx$确定，将$z=Sx$代入（9）式，即得(7)式。

下面，我们还要证明$S$线性、有界、唯一且$\|S\|=\|h\|$。

$S$是线性的。由（1）和定义6.3，对于任意的$x_1$，$x_2\in H_1$，$\alpha$，$\beta\in K$，和任意的$y\in H_2$，均有

$$\begin{aligned}\langle S(\alpha x_1+\beta x_2),\ y\rangle &= h(\alpha x_1+\beta x_2,\ y)\\ &=\alpha h(x_1,\ y)+\beta h(x_2,\ y)\\ &=\alpha\langle Sx_1,\ y\rangle+\beta\langle Sx_2,\ y\rangle\\ &=\langle \alpha Sx_1+\beta Sx_2,\ y\rangle\end{aligned}$$

再由引理6.2，推得$S(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Sx_1+\beta Sx_2$。

$S$是有界的。当$S=0$时，结论显然成立。不妨设$S\neq 0$,则有

$$\|h\|=\sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{|h(x,y)|}{\|x\|\|y\|}=\sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{|\langle Sx,y\rangle|}{\|x\|\|y\|}$$

$$\geqslant\sup_{x\neq 0}\frac{|\langle Sx,Sx\rangle|}{\|x\|\|Sx\|}=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Sx\|^2}{\|x\|\|Sx\|}$$

$$=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Sx\|}{\|x\|}=\|S\| \tag{10}$$

此时已证得$\|S\|$有界。

由Schwarz不等式，推得

$$\|h\|=\sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{|\langle Sx,y\rangle|}{\|x\|\|y\|}\leqslant\sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{\|Sx\|\|y\|}{\|x\|\|y\|}$$

$$=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Sx\|}{\|x\|}=\|S\|$$

此式与（10）式合起来，得到$\|S\|=\|h\|$。

$S$是唯一的。实际上，假设还有线性算子$T$：$H_1\longrightarrow H_2$使得对于所有的$x\in H_1$和$y\in H_2$，有

$$h(x,y)=\langle Sx,y\rangle=\langle Tx,y\rangle$$

所以，

$$\langle Sx,y\rangle - \langle Tx,y\rangle = \langle Sx - Tx, y\rangle = \langle (S-T)x, y\rangle = 0$$

由引理6.2，有 $(S-T)x=0$对于一切$x$成立，于是$S=T$。

## 习　　题

1. 证明：空间$l^2$上的每个有界线性泛函均可表成下述形式

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\eta_i}\quad\left(z=(\eta_i)\in l^2\right)$$

2. 如果$z$是内积空间$X$的任意固定元，证明：$f(x)=\langle x, z\rangle$确定了$X$上的一个范数为$\|z\|$的有界线性泛函。

3. 证明：实空间$l^2$的对偶空间是$l^2$。

4. 证明：Hilbert空间$H$的对偶空间$H'$仍是一个Hilbert空间，其内积为

$$\langle f_z, f_v\rangle=\overline{\langle z, v\rangle}=\langle v, z\rangle$$

其中$f_z(x)=\langle x, z\rangle$，$f_v(x)=\langle x, v\rangle$。

5. (Hermite型)设$X$是域$K$上的线性空间，$X\times X$上的Hermite半双线性型或简称Hermite型，是映射$h$：$X\times X\longrightarrow K$，使得对于所有的$x$，$y$，$z\in X$和任意的$\alpha\in K$，有

$$h(x+y, z)=h(x,z)+h(y, z);$$

$$h(\alpha x, y)=\alpha h(x,y);$$

$$h(x,y)=\overline{h(y,x)}。$$

如果$K=R$，则最后一个条件是什么？必须附加什么条件，$h$才成为$X$上的内积。

6. (Schwarz不等式) 设$X$是线性空间，$h$是$X\times X$上的Hermite型，此型称为是半正定的，如果对于所有的$x\in X$，都有$h(x,x)\geqslant 0$，证明如此的$h$满足Schwarz不等式

$$|h(x,y)|^2\leqslant h(x,x)h(y,y)$$

7. (半范数)如果$h$满足上题条件，证明：$p(x)=\sqrt{h(x,x)}$定义了$X$上的半范数。

## §7 Hilbert伴算子

上节的结果使我们得以导出Hilbert空间上有界线性算子的Hilbert伴算子。这个算子由矩阵论、线性微分方程和线性积分方程的有关问题提出，借助于它可以定义出三类重要的算子，它们在各种应用问题中起着关键的作用。

**7.1 定义** 设$T: H_1 \longrightarrow H_2$是有界线性算子，其中$H_1$和$H_2$都是Hilbert空间，则$T$的**Hilbert伴算子**$T^*: H_2 \longrightarrow H_1$，使得对于所有的$x \in H_1$和$y \in H_2$，有

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \qquad (1)$$

这个定义的合理性由下一定理可以看出。

**7.2 定理** 定义7.1中给出的$T$的Hilbert伴算子$T^*$存在、唯一，并且是有界线性算子，成立着关系

$$\|T^*\| = \|T\| \qquad (2)$$

**证** 因为内积是半双线性型，且$T$是线性算子，所以

$$h(y, x) = \langle y, Tx\rangle \qquad (3)$$

决定了$H_2 \times H_1$上的一个有界半双线性型。实际上，型的共轭线性性可由下式推得：

$$\begin{aligned} h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) &= \langle y,\ T(\alpha x_1 + \beta x_2)\rangle \\ &= \langle y,\ \alpha T x_1 + \beta T x_2\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle y, Tx_1\rangle + \bar{\beta}\langle y, Tx_2\rangle \\ &= \bar{\alpha}\, h(y, x_1) + \bar{\beta}\, h(y, x_2) \end{aligned}$$

$h$是有界的。实际上，根据Schwarz不等式，

$$|h(y,x)| = |\langle y, Tx\rangle| \leqslant \|y\|\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|\|y\|,$$

蕴含$\|h\| \leqslant \|T\|$。另一方面，

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle y, Tx\rangle|}{\|y\|\|x\|} \geqslant \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle Tx, Tx\rangle|}{\|Tx\|\|x\|} = \|T\|$$

合起来，得到

$$\|h\| = \|T\| \tag{4}$$

定理6.4给出了$h$的表示，记$S$为$T^*$，我们有

$$h(y, x) = \langle T^*y, x\rangle \tag{5}$$

从这个定理知$T^*$：$H_2 \longrightarrow H_1$是唯一确定的有界线性算子，其范数满足关系

$$\|T^*\| = \|h\| = \|T\|$$

于是，（2）式得证。比较（3）式和（5）式，也有$\langle y, Tx\rangle = \langle T^*y, x\rangle$，等式两端取复共轭，得出（1）式。

为了方便以后的讨论，我们先给出下述引理。

**7.3 引理** 设$X$和$Y$都是内积空间，并且$Q$：$X \longrightarrow Y$是有界线性算子，则

（Ⅰ）$Q = O$当且仅当$\langle Qx, y\rangle = 0$对一切的$x \in X$和$y \in Y$成立；

（Ⅱ）如果$Q$：$X \to X$，其中$X$是复内积空间，并且$\langle Qx, x\rangle = 0$对于所有的$x \in X$成立，则$Q = O$。

**证** （Ⅰ）$Q = O$，即$Qx = 0$对所有的$x \in X$成立，蕴含$\langle Qx, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$。

反之，如果对于一切$x$和$y$，$\langle Qx, y\rangle = 0$，由引理6.2推得$Qx = 0$对所有的$x$成立，由定义，$Q = O$。

（Ⅱ）由假设，对于任意的$v = \alpha x + y \in X$，有$\langle Qv, v\rangle = 0$，亦即

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q(\alpha x + y), \alpha x + y\rangle \\ &= |\alpha|^2\langle Qx, x\rangle + \langle Qy, y\rangle + \alpha\langle Qx, y\rangle + \overline{\alpha}\langle Qy, x\rangle \end{aligned}$$

根据假设，上式右端的前两项是零，特别取$\alpha=1$，得出

$$\langle Qx, y\rangle+\langle Qy, x\rangle=0$$

又取$\alpha=i$，推得

$$\langle Qx, y\rangle-\langle Qy, x\rangle=0$$

两式相加，于是$\langle Qx,y\rangle=0$，再利用(Ⅰ)的结果，得出$Q=O$。

引理7.3(Ⅱ)，$X$为复内积空间是基本的。实际上，如果$X$为实内积空间，结论未必成立。例如：实平面$R^2$中旋转90°的算子$Q$，显然$Q$是线性算子，并且$Qx\perp x$，因此，对于任意$x\in R^2$，都有$\langle Qx, x\rangle=0$，但是$Q\neq O$。

下面，我们来证明Hilbert伴算子的一些常用的性质。

**7.4 定理** 设$H_1$和$H_2$是Hilbert空间，$S$：$H_1\to H_2$，$T$：$H_1\to H_2$，都是有界线性算子，$\alpha$是任意标量，则有下列性质：

(Ⅰ) $\langle T^*y, x\rangle=\langle y, Tx\rangle$，$(x\in H_1,\ y\in H_2)$；

(Ⅱ) $(S+T)^*=S^*+T^*$；

(Ⅲ) $(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*$；

(Ⅳ) $(T^*)^*=T$；　　　　(6)

(Ⅴ) $\|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2$；

(Ⅵ) $T^*T=O$当且仅当$T=O$；

(Ⅶ) $(ST)^*=T^*S^*$

**证** (Ⅰ) 由(1)式，有

$$\langle T^*y,x\rangle=\overline{\langle x,T^*y\rangle}=\overline{\langle Tx,y\rangle}=\langle y, Tx\rangle$$

(Ⅱ) 由(1)式，对于所有的$x$和$y$，

$$\begin{aligned}\langle x, (S+T)^*y\rangle&=\langle (S+T)x, y\rangle=\langle Sx, y\rangle+\langle Tx, y\rangle\\&=\langle x, S^*y\rangle+\langle x, T^*y\rangle\\&=\langle x, (S^*+T^*)y\rangle\end{aligned}$$

利用引理6.2，得到$(S+T)^*y=(S^*+T^*)y$对于一切y成立，由定义，（Ⅱ）成立。

（Ⅲ） 因为

$$\begin{aligned}\langle(aT)^*y,\ x\rangle&=\langle y,\ (aT)x\rangle\\&=\langle y,\ a(Tx)\rangle\\&=\overline{a}\langle y,\ Tx\rangle\\&=\overline{a}\langle T^*y,\ x\rangle\\&=\langle\overline{a}T^*y,\ x\rangle\end{aligned}$$

于是，$\langle[(aT)^*-\overline{a}T^*]y,\ x\rangle=0$对于所有的$x$，y成立，又由引理7.3（Ⅰ），推得$(aT)^*=\overline{a}T^*$。

值得注意的是，应严格区分（Ⅲ）式与关系$T^*(ax)=aT^*x$。

（Ⅳ） 对于所有的$x\in H_1$和$y\in H_2$，从（Ⅰ）和（1）式，有

$$\langle(T^*)^*x,\ y\rangle=\langle x,\ T^*y\rangle=\langle Tx,\ y\rangle$$

应用引理7.3（Ⅰ）于算子$Q=(T^*)^*-T$，即得证。

（Ⅴ） 显然$T^*T$：$H_1\to H_1$，而$TT^*$：$H_2\to H_2$，由Schwarz不等式，有

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2=\langle Tx,\ Tx\rangle=\langle T^*Tx,\ x\rangle&\leqslant\|T^*Tx\|\ \|x\|\\&\leqslant\|T^*T\|\ \|x\|^2\end{aligned}$$

对范数为1的所有$x$取上确界，得到$\|T\|^2\leqslant\|T^*T\|$，再利用第三章§7中（1）式和本节的（2）式，得到

$$\|T^*T\|\leqslant\|T^*\|\ \|T\|=\|T\|^2$$

推得$\|T^*T\|=\|T\|^2$

用$T^*$代替上面讨论中的$T$，由（2）式和（Ⅳ），还有

$\|TT^*\| = \|(T^*)^*T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$。

这里，我们记$(T^*)^* = T^{**}$，由(Ⅳ)知$T^{**} = T$。

(Ⅵ) 这是(Ⅴ)的直接推论。

(Ⅶ) 重复使用(1)式，推出

$$\langle x, (ST)^*y\rangle = \langle (ST)x, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle$$

因此，由引理6.2，有$(ST)^*y = T^*S^*y$对任意y成立，所以$(ST)^* = T^*S^*$。

**7.5 推论** 如果定理7.4中有界线性算子$T$是$H_1 \to H_2$上的双射，则

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \tag{7}$$

**证** 由第三章有界逆定理11.7，$T$的逆算子$T^{-1}$存在且是有界线性算子，根据定理7.2，$(T^{-1})^*$存在、唯一且仍是有界线性的。对于合于条件的任意$x$和y，有

$$\langle x, T^*(T^{-1})^*y\rangle = \langle Tx, (T^{-1})^*y\rangle = \langle T^{-1}Tx, y\rangle$$
$$= \langle x, y\rangle$$

因此，$T^*(T^{-1})^* = I$。另一方面

$$\langle x, (T^{-1})^*T^*y\rangle = \langle TT^{-1}x, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

推得

$$(T^{-1})^*T^* = I$$

总之，$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$。

## 习　题

1. 证明：$O^* = O$，$I^* = I$。

2. 如果$\{T_n\}$是Hilbert空间中的有界线性算子序列，且$T_n \to T$，证明：$T_n^* \to T^*$。

3. 设$H_1$和$H_2$是Hilbert空间，$T: H_1 \to H_2$是有界线性算子，如果$A_1 \subset H_1$，$A_2 \subset H_2$，使得$T(A_1) \subset A_2$，证明：$A_1^{\perp} \supset T^*(A_2^{\perp})$。

4. 设上题中的$A_1$和$A_2$是闭子空间，证明：$T(A_1) \subset A_2$当且仅当

$A_1^{\perp} \supset T^*(A_2^{\perp})$。

5． 假设$T_1$和$T_2$是复Hilbert空间$H$到本身的有界线性算子，若$\langle T_1x, x\rangle = \langle T_2x, x\rangle$对全体$x \in H$成立，证明：$T_1 = T_2$。

6． 证明：Hilbert空间$H$上的有界线性算子$T$：$H \to H$有有限维的值域，当且仅当$T$可以表成下述形式

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle v \qquad (u_i, v_i \in H)$$

7． 设$S = I + T^*T$：$H \to H$，其中$T$是有界线性算子．证明逆算子$S^{-1}$：$S(H) \to H$存在。

8． 如果题3中的$A_1 = \mathcal{N}(T) = \{x|_{Tx=0}\}$，证明：

（Ⅰ） $T^*(H_2) \subset A_1^{\perp}$；（Ⅱ） $[T(H_1)]^{\perp} \subset \mathcal{N}(T^*)$；

（Ⅲ） $A_1 = [T^*(H_2)]^{\perp}$.

## §8 自伴算子、酉算子和正规算子

与Hilbert伴算子有密切关系，最具有实践重要性的一类有界线性算子是本节要讨论的酉算子、正规算子、自伴算子以及正算子。

**8.1 定义** Hilbert空间$H$上的有界线性算子$T$：$H \to H$，称为是**自伴**的或Hermite的，如果$T^* = T$。称为是**酉**的，如果$T$是双射且$T^* = T^{-1}$。称为是**正规**的，如果$TT^* = T^*T$。

借助于§7的（1）式，易知，如果$T$是自伴算子，则有

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad (1)$$

显然，如果$T$是自伴算子或者酉算子，则$T$必是正规算子。反之则不然。例如：如果$I$是空间$H$上的恒同算子，则$T = 2iI$是正规算子，因为$T^* = -2iI$，于是$TT^* = T^*T = 4I$，然而，$T^* \neq T$，同样$T^* \neq T^{-1} = -(iI)/2$。

我们也可以把定义8.1中的算子与矩阵联系起来进行讨

论，并且叙述一些重要关系。

**8.2 例** 考虑空间$C^n$，其内积为

$$\langle x, y\rangle = x^{\top}\overline{y} \tag{2}$$

其中$x$和$y$写成列向量，$x^{\top}=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$。

假设$T$：$C^n \to C^n$是线性算子(由第三章定理7.4，它必是有界的)，给定$C^n$中的一组基，则可以用两个$n\times n$矩阵$A$和$B$分别表示$T$和它的Hilbert伴算子$T^*$。

使用(2)式，有$(Bx)^{\top}=x^{\top}B^{\top}$，推得

$$\langle Tx, y\rangle = (Ax)^{\top}\overline{y} = x^{\top}A^{\top}\overline{y}$$

且

$$\langle x, T^*y\rangle = x^{\top}\ \overline{B}\,\overline{y}$$

由§7(1)式，上列二式对于一切$x$，$y\in C^n$相等，于是$A^{\top}=\overline{B}$，因此$B=\overline{A}^{\top}$。

这说明：如果给定酉空间$C^n$的一组基，并且$C^n$的一个线性算子由确定的矩阵表示，那么它的Hilbert伴算子表成原矩阵的复共轭转置矩阵。

所以，如果$T$是自伴算子，则它的表示矩阵是**Hermite矩阵**（$\overline{A}^{\top}=A$或$\overline{\alpha}_{ki}=\alpha_{ik}$）；如果$T$是酉算子，则其表示矩阵为**酉矩阵**（$\overline{A}^{\top}=A^{-1}$）；如果$T$是正规算子，则表示矩阵是**正规矩阵**($A\overline{A}^{\top}=\overline{A}^{\top}A$)。

但是，如果线性算子$T$：$R^n\to R^n$，则如果$T$是自伴算子，其表示矩阵是**实对称矩阵**，而酉算子的表示矩阵为**正交矩阵**。

下面，我们来具体讨论这些算子。

**8.3 定理** 设$T$：$H\to H$是 Hilbert空间$H$上的有界线性算子，则

（Ⅰ）如果$T$是自伴算子，则对于全体$x\in H$，$\langle Tx, x\rangle$是实数；

（Ⅱ）如果$H$是复Hilbert空间，对于所有的$x\in H$，$\langle Tx, x\rangle$是实数，则$T$是自伴算子。

**证** （Ⅰ）若$T$是自伴算子，则对于所有的$x\in H$，有

$$\overline{\langle Tx, x\rangle}=\langle x, Tx\rangle=\langle Tx, x\rangle$$

（Ⅱ）如果对于所有$x$，$\langle Tx, x\rangle$是实数，则

$$\langle Tx, x\rangle=\overline{\langle Tx, x\rangle}=\overline{\langle x, T^*x\rangle}=\langle T^*x, x\rangle$$

所以

$$0=\langle Tx, x\rangle-\langle T^*x, x\rangle=\langle (T-T^*)x, x\rangle$$

由于$H$是复空间，由引理7.3(Ⅱ)，得到$T-T^*=O$。

**8.4 定理** Hilbert空间$H$上的两个有界自伴线性算子$S$和$T$的积算子仍是自伴的当且仅当$S$与$T$可换：$ST=TS$。

证 由定理7.4(Ⅶ)和假设，有

$$(ST)^*=T^*S^*=TS$$

因此，

$$ST=(ST)^*\Longleftrightarrow ST=TS$$

**8.5 定理** 设$\{T_n\}$是Hilbert空间$H$上的自伴有界线性算子序列，$T_n$：$H\to H$，假设$\{T_n\}$收敛，$T_n\to T$，则$T$仍是$H$上的自伴有界线性算子。

**证** 利用定理7.4和7.2，有

$$\|T_n^*-T^*\|=\|(T_n-T)^*\|=\|T_n-T\|$$

并由空间$B(H, H)$中的三角不等式，得到

$$\|T-T^*\| \leqslant \|T-T_n\|+\|T_n-T_n^*\|+\|T_n^*-T^*\|$$
$$=\|T-T_n\|+0+\|T_n-T\|$$
$$=2\|T_n-T\|\to 0 \qquad (n\to\infty)$$
于是，$\|T-T^*\|=0$，所以$T^*=T$。

**8.6 定义** 如果$T$和$S$都是Hilbert空间$H$上的自伴有界线性算子，$\langle Tx, x\rangle \geqslant \langle Sx, x\rangle$对于所有的$x\in H$成立，则记为$T\geqslant S$，或$S\leqslant T$。自伴算子序列$\{T_n\}$称为是**上升的**，如果$T_1\leqslant T_2\leqslant\cdots$；称为是**下降**的，如果$T_1\geqslant T_2\geqslant\cdots$。

**8.7 定理** 假设$T$是Hilbert空间$H$上的自伴有界线性算子，存在实数$m_1$和$m_2$，使得$m_1 I\leqslant T\leqslant m_2 I$其中$m_1$是满足该条件的最大数，$m_2$是最小数，并且$m=\max\{|m_1|, |m_2|\}$，则有$\|T\|=m$。

**证** 对于所有的$x\in H$，显然$m$是$|(Tx, x)|/\|x\|^2$的上界。因为$|(Tx, x)|\leqslant\|Tx\|\|x\|\leqslant\|T\|\|x\|^2$。因此，$m\leqslant\|T\|$。

为了证明相反的不等式，考虑

$$\langle T(y+z), y+z\rangle-\langle T(y-z), y-z\rangle$$
$$=2\langle Ty, z\rangle+2\langle Ty, z\rangle$$

于是 $2\langle Ty, z\rangle+2\langle y, Tz\rangle=2\langle Ty, z\rangle+2\langle Ty, z\rangle$

$$\leqslant m\|y+z\|^2+m\|y-z\|^2=2m(\|y\|^2+\|z\|^2)$$

这里，$y,z\in H$。对于非0实数$\alpha$和$x\neq 0$，取$y=\alpha x, z=Tx/\alpha$，推得

$$4\|Tx\|^2=4\langle Tx, Tx\rangle=2\langle T\alpha x, Tx/\alpha\rangle+2\langle Tx/\alpha, T\alpha x\rangle\leqslant 2m(\alpha^2\|x\|^2+\|Tx\|^2/\alpha^2)$$

只要取$\alpha^2=\|Tx\|/\|x\|$，有

$$4\|Tx\|^2\leqslant 2m(\|Tx\|\|x\|+\|Tx\|\|x\|)=4m\|Tx\|\|x\|$$

这蕴含$\|Tx\|\leqslant m\|x\|$，于是$\|T\|\leqslant m$。

下面，引入一类实用中经常使用的算子——正算子。

**8.8 定义** Hilbert空间$H$上的自伴有界线性算子$T$称为是**正算子**，如果对于所有的$x\in H$，有$\langle Tx, x\rangle\geqslant 0$。

显然，零算子$O$和恒同算子$I$是正算子。容易证明：$T^*T$和$TT^*$是正算子，其中$T$是$H$上的有界线性算子。请读者自证。

**8.9 定理** 设$T$和$S$是复Hilbert空间$H$上的有界线性算子，则

（Ⅰ）如果$T$是自伴的，则$S^*TS$亦是自伴算子；若$T$是正的，则$S^*TS$亦是正的。

（Ⅱ）如果$S$的值域在$H$中稠，并且$S^*TS$是自伴算子，则$T$是自伴的；如果$S^*TS$是正的，则$T$亦是正算子。

**证** （Ⅰ）若$T$自伴，则$\langle S^*TSx, x\rangle=\langle TSx, Sx\rangle$对于所有的$x\in H$是实的，由定理**8.3**（Ⅱ），推得$S^*TS$是自伴算子。如果$T$是正算子，则$\langle S^*TSx, x\rangle=\langle TSx, Sx\rangle\geqslant 0$，于是$S^*TS$也是正算子。

（Ⅱ）在$\mathscr{R}(S)$中的每一个$x=Sy$，都有$\langle Tx,x\rangle=\langle TSy, Sy\rangle=\langle S^*TSy, y\rangle$。设$S^*TS$是自伴算子，以及$\overline{\mathscr{R}(S)}=H$，则$\langle Tx, x\rangle$在$\mathscr{R}(S)$上取实值，则对于所有的$x\in H$，$\langle Tx, x\rangle$是实数，因此$T$是自伴算子。另一方面，如果$S^*TS$是正算子，则有$\langle Tx, x\rangle\geqslant 0$，$x\in\mathscr{R}(S)$，于是，对于全体$x\in H$，$\langle Tx, x\rangle\geqslant 0$。

**8.10 定理** 如果$T_1$和$T_2$是Hilbert空间$H$上的自伴有界线性算子，$T_2$还是正算子，$T_1$与$T_2$可换，则$T_1^2T_2$是正算子。

**证** 对于所有的$x\in H$，有

$$\langle T_1^2T_2x, x\rangle=\langle T_1T_2x, T_1x\rangle=\langle T_2T_1x, T_1x\rangle\geqslant 0$$

**8.11 定理** 如果$T$和$S$是 Hilbert 空间$H$上的正算子且可换，则$TS=ST$亦是正算子。

**证** 显然可以假设$T\neq O$，因此$\|T\|>0$，定义算子序列$\{T_n\}$如下：

$$T_1=T/\|T\|,\ T_2=T_1-T_1^2,\ T_3=T_2-T_2^2,\ \cdots,$$
$$T_{n+1}=T_n-T_n^2,\ \cdots$$

用数学归纳法证明$0\leqslant T_n\leqslant I$。当$n=1$时，对于任意$x\in H$，有

$$0\leqslant\langle T_1x,\ x\rangle=\langle Tx,\ x\rangle/\|T\|\leqslant\langle x,\ x\rangle$$

因此，$O\leqslant T_1\leqslant I$。因为$I-T_{n+1}=(I-T_n)+T_n^2$，且

$$T_{n+1}=T_n-T_n^2=T_n^2-T_n^3+T_n-2T_n^2+T_n^3$$

所以$T_{n+1}=T_n^2(I-T_n)+T_n(I-T_n)^2$。假设$T_n\geqslant O$，且$I-T_n\geqslant O$，有$I-T_{n+1}\geqslant O$以及$T_{n+1}\geqslant 0$，于是$O\leqslant T_{n+1}\leqslant I$。从$T_1=T_1^2+T_2^2+\cdots+T_n^2+T_{n+1}$和$T_{n+1}\geqslant O$，必有

$$\sum_{k=1}^{n}\langle T_kx,\ T_kx\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle T_k^2x,\ x\rangle=\langle T_1x,\ x\rangle-\langle T_{n+1}x,x\rangle$$
$$\leqslant\langle T_1x,\ x\rangle$$

推得级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|T_kx\|^2$收敛，于是$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_nx\|=0$，

则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}T_k^2\right)x=\lim\limits_{n\to\infty}(T_1x-T_{n+1}x)=T_1x$。

使用$T$与$S$可换的假设，推得$S$与$T_k$可换$(k=1,\ 2,\ \cdots)$，因此，

$$\langle STx,\ x\rangle/\|T\| = \langle ST_1x,\ x\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle ST_k^2x,\ x\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle T_kST_kx,\ x\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle ST_kx,\ T_kx\rangle \geqslant 0$$

说明$ST$是正算子。

关于酉算子，我们有下述定理。

**8.12 定理** 设$U$：$H\to H$，$V$：$H\to H$是酉算子，其中$H$是Hilbert空间，则

（Ⅰ）$U$是等距算子，所以，对于所有$x\in H$，有$\|Ux\|=\|x\|$；

（Ⅱ）若$H\neq\{0\}$，则$\|U\|=1$；

（Ⅲ）$U^{-1}$也是酉算子；

（Ⅳ）$UV$是酉算子；

（Ⅴ）$U$是正规算子；

（Ⅵ）如果$H$是复Hilbert空间，则$H$上的有界线性算子$T$是酉算子当且仅当$T$是等距的且是满射。

**证** （Ⅰ）从下式推得

$\|Ux\|^2=\langle Ux,\ Ux\rangle=\langle x,\ U^*Ux\rangle=\langle x,\ Ix\rangle=\|x\|^2$

（Ⅱ）直接从（Ⅰ）推出。

（Ⅲ）因为$U$是双射，所以$U^{-1}$亦然，由定理7.4，

$(U^{-1})^*=U^{**}=U=(U^{-1})^{-1}$

（Ⅳ）$UV$是双射，由定理7.4和第三章定理6.5，得到

$$(UV)^*=V^*U^*=V^{-1}U^{-1}=(UV)^{-1}$$

（Ⅴ）从$U^{-1}=U^*$和$U^*U=U^{-1}U=UU^{-1}=UU^*$

（Ⅵ）假设$T$是等距的，并且是满射，等距性蕴含单射，于是$T$是双射，下面证明$T^*=T^{-1}$。由等距性，推得

$$\langle T^*Tx,\ x\rangle=\langle Tx,\ Tx\rangle=\langle x,\ x\rangle=\langle Ix,\ x\rangle$$

所以，$\langle (T^*T-I)x,\ x\rangle=0$

使用引理7.3(Ⅱ)，必有$T^*T-I=O$，于是$T^*T=I$，据此，有

$$TT^*=TT^*(TT^{-1})=T(T^*T)T^{-1}=TIT^{-1}=I$$

于是，$T^*T=TT^*=I$，$T^*=T^{-1}$，$T$是酉算子。逆命题显然成立。

值得注意的是：等距算子未必是酉算子，因为它可能不是满射。例如：右移算子$T$：$l^2\to l^2$，$(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \cdots)\longmapsto(0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)$，其中$x=(\xi_i)\in l^2$。

## 习　题

1．如果$H$是Hilbert空间，$T$：$H\to H$是有界自伴线性算子，证明$T_n$亦然，其中$n$是某自然数。

2．若$T$：$H\to H$是有界线性算子，则必有$T=A+iB$，其中$A$，$B$都是自伴算子。

3．如果$T$是正算子，证明：存在唯一的有界线性算子$B\geqslant O$，使得$B^2=T$．(此时称$B$是算子$A$的正平方根)．

(提示：对于$O\leqslant A\leqslant I$，定义$B_0=O$，并且$B_{n+1}=B_n+\frac{1}{2}(T-B_n^2)$，$B_n$收敛于$A$的平方根)。

4．如果$T^2=T$，且$T$是正规算子，证明$T$是自伴算子．

5．证明：等距线性算子$T$：$H\to H$，不是Hilbert空间$H$到它的一真闭子空间上的酉算子．

6．如果$T_n$：$H\to H(n=1,\ 2,\ \cdots)$是正规算子列，并且$T_n\to T$，证明$T$是正规算子。

7．证明：复Hilbert空间$H$上的有界线性算子$T$：$H\to H$是正规的，当且仅当对于所有的$x\in H$，有$\|T^*x\|=\|Tx\|$．据此，证明：对于正规线性算子$T$，有$\|T^2\|=\|T\|^2$．

# 第五章 逼近理论初步

随着电子计算机的发展，数值数学理论日益受到人们的重视，因此，逼近理论的研究亦有了相当的进展。从更高的角度，更抽象、更一般地将逼近理论中的主要成果进行概括，当然是一项有意义的工作。本节就是这一方面工作的初步介绍。首先，我们建立起赋范空间中最佳逼近的概念，然后，着重讨论最佳逼近的存在、唯一性问题，为此导入“严格凸”的概念以及连续函数空间$C[a, b]$中的Haar条件。

## §1 赋范空间中的逼近

所谓逼近，就是给定了一个确定函数类中的元（例如：某区间上的连续函数），设法用该函数类中一个更简单的元（例如：多项式）去近似表示它。这其实并不陌生，微积分中的Taylor公式就是基于这一思想而建立起来的，例如

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}\approx e^x$$

当然，既是逼近，一般并不相等，这就有一个估计误差的问题。

**1.1 定义** 设$X$是赋范空间，$Y$是$X$的给定的非空子空间，给定$x\in X$，若有$y_0\in Y$，使得

$$\delta=\delta(x,Y)=\inf_{y\in Y}\|x-y\|=\|x-y_0\| \tag{1}$$

则称$y_0$是$Y$到$x$的**最佳逼近**。

自然，满足定义1.1中的$y_0$未必存在，若存在也未必唯一。但在很多应用中，Y 可以是一个有限维子空间，则有下述定理。

**1.2　定理**　如果$Y$是赋范空间$X$的一个有限维子空间，则对于每一个$x\in X$，必存在着从Y到$x$的最佳逼近。

**证**　对于给定的$x\in X$，作闭球

$$\widetilde{B}=\{y\in Y\mid_{\|y\|\leqslant 2\|x\|}\}$$

显然，$0\in\widetilde{B}$，于是，有

$$\delta(x,\widetilde{B})=\inf_{\widetilde{y}\in\widetilde{B}}\|x-\widetilde{y}\|\leqslant\|x-0\|=\|x\|$$

如果$y\notin\widetilde{B}$，则$\|y\|>2\|x\|$，于是

$$\|x-y\|\geqslant\|y\|-\|x\|>\|x\|\geqslant\delta(x,\widetilde{B})\tag{2}$$

这说明$\delta(x,\widetilde{B})=\delta(x,y)=\delta$，并且由(2)式，$y\notin Y-\widetilde{B}$，所以，如果最佳逼近存在，则$y\in\widetilde{B}$。由第三章定理5.3，因为$\widetilde{B}$是Y中的有界闭集，故$\widetilde{B}$是紧集，又知范数连续，再根据第三章推论5.7，必有$y_0\in\widetilde{B}$，使得$\|x-y\|$在$y=y_0$处达到最小值，即$\delta=\inf\limits_{\widetilde{y}\in\widetilde{B}}\|x-\widetilde{y}\|=\|x-y_0\|$，又由定义1.1，$y_0$是Y到$x$的最佳逼近。

**1.3　空间$C[a,b]$**。取$Y=\mathrm{span}\{x_0,\ \cdots,\ x_n\}=\mathrm{span}\{1,\ t,\ \cdots,\ t^n\}$，这里，$n$是固定非负整数，$x_i=t^i(i=0,\ 1,\cdots,\ n)$。则$\dim Y=n+1$，由定理1.2，对于任意给定连续函数

$x(t)\in C[a, b]$，必存在至多为$n$次的**多项式**$P_n(t)$，使得

$$\delta=\max_{a\le t\le b}\left|x(t)-P_n(t)\right|\le\max_{a\le t\le b}\left|x(t)-y(t)\right|$$

其中$y(t)\in Y$。我们称$C[a, b]$中的逼近为**一致逼近**。

**1.4 多项式** 定理1.2中，$Y$是有限维空间的条件是本质的，否则，结论可能不成立。例如：$Y=\{$区间$[0, 1/2]$上全体多项式$\}$，则有 $\dim Y=\infty$，取 $x(t)=1/(1-t)$，则$x(t)\in C[0, 1/2]$。对于任给$\varepsilon>0$，存在$N(\varepsilon)>0$，使得对于所有的$n>N(\varepsilon)$，$y_n(t)=1+t+\cdots+t^n$，有

$$\|x-y_n\|=\max_{0\le t\le\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{1-t}-(1+t+\cdots+t^n)\right|$$

$$=\max_{0\le t\le\frac{1}{2}}\left|(1+t+\cdots+t^n+\cdots)-(1+t+\cdots+t^n)\right|$$

$$=\max_{0\le t\le\frac{1}{2}}\left|t^{n+1}+t^{n+2}+\cdots\right|$$

$$=\max_{0\le t\le\frac{1}{2}}\left|t^{n+1}(1+t++t^2+\cdots)\right|$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

因此，$\delta(x, y)=0$。但是，由于$x(t)$不是多项式，于是，任何$y(t)\in Y$，都有$x\neq y$，所以$\|x-y\|\neq 0$，即不存在$y_0\in Y$，使得$\|x-y_0\|=0$。这说明无限维子空间$Y$上，结论不成立。

下面研究赋范空间X中最佳逼近的唯一性问题。

这个问题在赋范空间X中研究是比较复杂的。例如：取$X=R^3$，Y是$\xi_1-\xi_2$平面($\zeta_3\equiv0$)，则$Y\subset X$是X的子空间。给定元$x_0=(\xi_{10},\xi_{20},\xi_{30})$，从几何上，大家知道，最佳逼近是点$y_0=(\xi_{10},\xi_{20},0)$，从$x_0$到Y的距离是$\delta=|\xi_{30}|$。显然，$y_0$是唯一的。

又如：$X=(X,\|\cdot\|_1)$是全体实数对$x=(\xi_1,\xi_2)$作成的空间，其范数为$\|x\|_1=|\xi_1|+|\xi_2|$。取点$x=(1,-1)$，取Y为直线$y=x$(如图5-1)，亦即$Y=\{y\in X|_{y=(\eta,\eta),\ \eta\in R}\}$，则对于所有的$y\in Y$，显然有

$$\|x-y\|_1=|1-\eta|+|-1-\eta|=|1-\eta|+|1+\eta|$$
$$\geqslant|1-\eta+1+\eta|=2$$

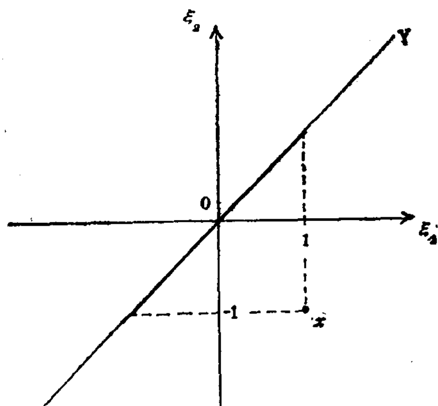



图5-1　在$\|\cdot\|_1$下Y到x的最佳逼近分布情形

于是，x到y的距离为$\delta(x,y)=\inf\limits_{y\in Y}\|x-y\|=2$。则当$|\eta|$

$\leqslant 1$时，全体点$y=(\eta,\ \eta)\in Y$都是$Y$到$x$的最佳逼近。说明达到最佳逼近的点$y$有无数个。

如此简单的空间上情形就极为不同，因此，要保证最佳逼近的唯一性，还需要附加其它的条件，其中的一个重要条件就是严格凸性。

**1.5 引理** 在赋范空间$X$中，子空间$Y\subset X$到给定元$x$的最佳逼近集$A$是凸集。

**证** 令$\delta=\delta(x,\ y)$，如果$A=\phi$，则结论显然成立。如果$A$是单点集，结论亦成立。现不妨设$A$至少有两个点，则对于任意的$y,\ z\in A$，由定义，必有

$$\|x-y\|=\|x-z\|=\delta$$

下证，对于任意的$\alpha\in[0,\ 1]$，有$u=\alpha y+(1-\alpha)z\in A$。显然$u\in Y$，因此$\|x-u\|\geqslant\delta$，但是

$$\begin{aligned}\|x-u\|&=\|x-[\alpha y+(1-\alpha)z]\|=\|\alpha(x-y)+(1-\alpha)(x-z)\|\\&\leqslant\alpha\|x-y\|+(1-\alpha)\|x-z\|=\alpha\delta+(1-\alpha)\delta=\delta\end{aligned}$$

合起来，推得$\|x-u\|=\delta$，所以$u\in A$，由$y,\ z$的任意性，$A$是凸集。

因此，如果对于固定的元$x\in X$，子空间$Y$有不止一个最佳逼近元$y$，那么，这些元作成一个凸集，且都有距离$\|x-y\|=\delta$。

作闭球

$$\widetilde{B}(x;\ \delta)=\{v|_{\|v-x\|\leqslant\delta}\}$$

根据引理1.5，可推知$Y$(其实应有$A\subset\widetilde{B}$)与闭球$\widetilde{B}$至少有一个公共线段$W$，并且$W$在$\widetilde{B}(x;\ \delta)$的边界球面$S(x;\ \delta)$上。对于每一个$u\in W$，都有$\|u-x\|=\delta$。更进一步说，对每一个$u\in W$，

必对应着元$g=u-x/\delta$，且$\|g\|=1$。于是，唯一性的要求应该是由$u=\alpha y+(1-\alpha)z$决定的每一个最佳逼近，都对应着单位球面$\{x|_{\|x\|=1}\}$上唯一的元$g$。这就对范数$\|\cdot\|$提出更高的要求：为了得到最佳逼近的唯一性，必须排除单位球面上可以包含直线段那样的范数。

这就是说，令$S_1=\{x|_{\|x\|=1}\}$，如果$y\in S_1$，$z\in S_1$，且$y\neq z$，则$\|\alpha y+(1-\alpha)z\|\leqslant\alpha\|y\|+(1-\alpha)\|z\|=1(0\leqslant\alpha\leqslant1)$。现在则进一步要求，当$y\neq z$时，$\|\alpha y+(1-\alpha)z\|<1$，$(0<\alpha<1)$则$u=\alpha y+(1-\alpha)z\notin S_1$，所以，欲要求$u\in S_1$，只有$y=z$，即可保证最佳逼近唯一。这就是严格凸的直观意义。

**1.6 定义** 范数称为是**严格凸范数**，如果对于任意范数为1的元$x$，$y$，都有

$$\|x+y\|<2 \quad (x\neq y) \tag{3}$$

具有严格凸范数的赋范空间称为**严格凸赋范空间**。

由范数的三角不等式，当$\|x\|=\|y\|=1$时，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|=2$，严格凸范数是把范数的公理$(N4)$，换成严格的不等式$\|x+y\|<2$。这里要求$\|x\|=\|y\|=1$，且$x\neq y$。等号成立仅当$x=y$。

**1.7 定理** 在严格凸赋范空间$X$中，对于给定的$x\in X$和给定的子空间$Y\subset X$，至多有一个最佳逼近。

从前面的分析，此唯一性定理显然成立。

**1.8 引理**

（Ⅰ） Hilbert空间$H$是严格凸的。

（Ⅱ） 空间$C[a, b]$不是严格凸的。

**证** （Ⅰ） 对于任意$x$，$y\in H$且$x\neq y$，$\|x\|=\|y\|=1$，

设$\|x-y\|=a$，则$a>0$，由平行四边形公式，

$$\|x+y\|^2=-\|x-y\|^2+2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$
$$=-a^2+2(1+1)<4$$

因此$\|x+y\|<2$。

（Ⅱ） 取$x_1(t)=1$，$x_2(t)=(t-a)/(b-a)$，$t\in[a,b]$，显然，$x_1$，$x_2\in C[a,\ b]$，并且$x_1\neq x_2$，易证$\|x_1\|=\|x_2\|=1$，但是

$$\|x_1+x_2\|=\max_{a\leq t\leq b}\left|1+\frac{t-a}{b-a}\right|=\max_{a\leq t\leq b}\left|\frac{b+t-2a}{b-a}\right|=2$$

由定义1.6，得证。

**1.9 定理** 设$H$是Hilbert空间，$x\in H$是给定元，$Y\subset H$是任意闭子空间，则必有唯一的从$Y$到$x$的最佳逼近。

此定理由第四章定理2.6和本章引理1.8及定理1.7直接得出。

## 习 题

1. 如果$Y$是赋范空间$X$的一个有限维子空间，欲讨论$Y$到元$x\in X$的逼近问题，自然会选择一组基$\{e_1,\ \cdots,\ e_n\}\subset Y$，并用线性组合$\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$来逼近$x$。证明下式确定的函数$f$：

$$f(a)=\left\|x-\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\right\|\qquad a=(a_1,\ \cdots,\ a_n)$$

连续地依赖于$a$。

2. 证明：上题中的$f$是个凸函数．（函数$g$称为是凸函数，如果$g$：$R^n\to R$，且定义域$D(g)$是凸集，对于每一对元$u$，$v\in D(g)$，

$$g[\lambda u+(1-\lambda)v]\leqslant\lambda g(u)+(1-\lambda)g(v)$$

其中$0\leqslant\lambda\leqslant1$。）

3． 证明：有序实数对作成的线性空间$X$上，对于$x=(\xi_1, \xi_2)$，其范数定义成

$$\|x\|=\max(|\xi_1|, |\xi_2|)$$

则$X$不是严格凸的，作出单位球面的图形。

4． 证明空间$l^p(p>1)$是严格凸的，而$l^1$空间不是严格凸的。

5． 证明：如果赋范空间$X$是严格凸的，则

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\| \qquad (x\neq 0, y\neq 0)$$

蕴含着$x=Cy$，其中$C$是正实数。

6． 证明题5的条件亦是充分的，亦即，若条件对于$X$中所有的$x\neq 0$，$y\neq 0$成立，则$X$是严格凸的。

## §2 一致逼近

为了各种不同的需要，选择不同类型的范数，因而得到不同类型的逼近，这就是我们实际作的事情。最常用的有

（Ⅰ） **一致逼近** 使用空间$C[a, b]$中的一致范数

$$\|x\| = \max_{a\leq t\leq b}|x(t)|。$$

（Ⅱ） **最小二乘逼近** 使用空间$L^2[a, b]$中的范数

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\int_a^b |x(t)|^2dt\right)^{1/2}$$

本节讨论一致逼近（亦即人们称为**Чебышев逼近的**）问题。考虑空间$X=C[a, b]$和$n$维子空间$Y\subset C[a, b]$。这里，我们讨论的是实连续函数。对于任意给定的函数$x\in X$，定理1.2保证了$Y$到$x$最佳逼近的存在。但是，由于空间$C[a, b]$不是严格凸的，其唯一性问题必须作专门的研究。为此，首先引入一个重要的概念。

**2.1 定义** 空间$C[a,b]$中的元$x$的**极值点**是$t_0\in[a,b]$，

使得

$$|x(t_0)| = \|x\| \tag{1}$$

显然，在$x$的极值点 $t_0$处，有 $x(t_0) = -\|x\|$，或$x(t_0) = \|x\|$，由一致范数的定义，$\|x\| = \max\limits_{a \leq t \leq b} \left| x(t) \right|$，使用微积分中的语言：极值点$t_0$是$x(t)$的极大点。

下面，转到空间$C[a,b]$中一致逼近唯一性的问题，重要的条件首先为A. Haar于1918年得到，故因此而命名。

**2.2 定义（Haar条件）** 实空间 $C[a, b]$中的有限维子空间Y称为是满足**Haar条件**的，如果每一个$y \in Y$，$y \neq 0$，在$[a, b]$中至多有$n-1$个零点，其中$n = \dim Y$。

例如：$C[a, b]$的$n$维子空间Y由多项式$y = 0$，和一切次数不超过$n-1$的实系数多项式构成，则Y满足Haar条件，这其实是最标准的情形。

在Haar条件的使用中，还需要下面的等价命题。

**2.3 引理** 对于每一组基$\{y_1, \cdots, y_n\} \subset Y$，以及区间$[a, b]$中任意几个不同点组$t_1, \cdots, t_n$，Haar条件等价于

$$\begin{vmatrix} y_1(t_1) & y_1(t_2) & \cdots & y_1(t_n) \\ y_2(t_1) & y_2(t_2) & \cdots & y_2(t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n(t_1) & y_n(t_2) & \cdots & y_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2}$$

**证** 显然，每一个$y(t) \in Y$，都可表成$y = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k y_k$，其中$a_k (k = 1, 2, \cdots, n)$是实数。子空间Y满足 Haar 条件，由定义2.2，任意$y \in Y$都至多$n-1$个零点，这等价于对$n$个或$n$个以上的数$t_1, t_2, \cdots, t_n \cdots$，如果使得$y(t_k) = 0 (k = 1, 2, \cdots)$，

则只有$y(t)\equiv 0$。于是

$$y(t_i)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k(t_i)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3}$$

亦即

$$\begin{cases}\alpha_1 y_1(t_1)+\alpha_2 y_2(t_1)+\cdots+\alpha_n y_n(t_1)=0\\ \alpha_1 y_1(t_2)+\alpha_2 y_2(t_2)+\cdots+\alpha_n y_n(t_2)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_1 y_1(t_n)+\alpha_2 y_2(t_n)+\cdots+\alpha_n y_n(t_n)=0\end{cases} \tag{4}$$

但是，$\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n\}$线性无关，由(3)式，推得$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$，因此，齐次线性方程组(4)只有零解的充要条件是(4)的系数行列式不为零，即

$$\begin{vmatrix} y_1(t_1) & y_2(t_1) & \cdots & y_n(t_1)\\ y_1(t_2) & y_2(t_2) & \cdots & y_n(t_2)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1(t_n) & y_2(t_n) & \cdots & y_n(t_n)\end{vmatrix}\neq 0$$

所以，其转置行列式(2)亦不为零。

**2.4 引理** 假设实空间$C[a,\ b]$的子空间$Y$满足Haar条件，若对于已知$x\in C[a,\ b]$和$y\in Y$，函数$x-y$有少于$n+1$个极值点，则$y$不是$Y$到$x$的最佳逼近。这里，$n=\dim Y$。

**证** 由假设，函数$\upsilon=x-y$有$m\leqslant n$个极值点$t_1,\ \cdots,t_m$。如果$m<n$，可以从$[a,\ b]$区间中再选出一些点补充进来，使得有$n$个不同的点$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$。利用这些点和$Y$中的一组基$\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$，可以作出一个非齐次线性方程组：

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k y_k(t_i)=\upsilon(t_i) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{5}$$

其中$\beta_k(k=1,2,\cdots,n)$是未知数。因为Y满足 Haar条件，由引理2.3和线性代数知识，方程组(5)有唯一一组解$\beta_1$，$\cdots$，$\beta_n$，利用这组解，定义

$$y_0=\beta_1 y_1+\cdots+\beta_n y_n$$

和 $$\tilde{y}=y+\varepsilon y_0$$

下面，对于充分小的$\varepsilon>0$，我们来证明，函数$\tilde{v}=x-\tilde{y}$满足条件

$$\|\tilde{v}\|<\|v\| \tag{6}$$

亦即$\|x-\tilde{y}\|<\|x-y\|$，所以，$y$当然不可能是$Y$到$x$的最佳逼近。

为此，必须估计值$\|\tilde{v}\|$。令$N$是包含$v$的极值点$t_1$，$\cdots$，$t_m$在内的集。$K=[a,b]/N$。于是，因为$v=x-y\neq 0$，所以，对于$t_i\in N$，有$|v(t_i)|=\|v\|>0$。由$v$的连续性，对于每一个$t_i$，必存在邻域$N_i$，使得在$N=N_1\cup\cdots\cup N_m$中，有

$$\mu=\inf_{t\in N}|v(t)|>0,\quad \inf_{t\in N}|y_0(t)|\geqslant\frac{1}{2}\|v\| \tag{7}$$

容易看出，(7)式的定义是合理的。由于$y_0(t_i)=v(t_i)\neq$ 0，所以，对于所有的$t\in N$，由(7)式，总有$[y_0(t)/v(t)]>$ 0，于是

$$\frac{y_0(t)}{v(t)}=\left|\frac{y_0(t)}{v(t)}\right|=\frac{|y_0(t)|}{|v(t)|}\geqslant\frac{\inf\limits_{t\in N}|y_0(t)|}{\|v\|}\geqslant\frac{1}{2}$$

令 $M_0=\sup\limits_{t\in N}|y_0(t)|$，则对于每一个正数$\varepsilon<(\mu/M_0)$和全体$t\in$N，得到

$$\frac{\varepsilon y_0(t)}{\upsilon(t)}=\frac{\varepsilon|y_0(t)|}{|\upsilon(t)|}\leqslant\frac{\varepsilon M_0}{\mu}<1$$

又由于$\tilde{\upsilon}=x-\tilde{y}=x-y-\varepsilon y_0=\upsilon-\varepsilon y_0$，利用上述不等式，对所有的$t\in N$和$0<\varepsilon<(\mu/M_0)$，推得

$$|\tilde{\upsilon}(t)|=|\upsilon(t)-\varepsilon y_0(t)|=|\upsilon(t)|\left(1-\frac{\varepsilon y_0(t)}{\upsilon(t)}\right)$$

$$\leqslant\|\upsilon\|\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\|\upsilon\| \tag{8}$$

**现在考虑补集$K=[a,\ b]\setminus N$，定义**

$$M_1=\sup_{t\in K}|y_0(t)|,\qquad K_2=\sup_{t\in K}|\upsilon(t)|$$

因为$\upsilon$的所有极值点都包含在$N$中，因此，总有$M_2<\|\upsilon\|$，故可写

$\|\upsilon\|=M_2+\eta$　　（其中$\eta>0$）

选择正数$\varepsilon<\eta/M_1$，所以$\varepsilon M_1<\eta$，因此，对于全体$t\in K$，

$$|\tilde{\upsilon}(t)|\leqslant|\upsilon(t)|+\varepsilon\|y_0(t)|\leqslant M_2+\varepsilon M_1<M_2+\eta<\|\upsilon\|$$

注意到$|\tilde{\upsilon}(t)|$不会超过一个与$t\in K$无关的上界，并且严格小于$\|\upsilon\|$。总之，令$\varepsilon<\min\{\mu/M_0,\ \eta/M_1\}$，因为$\tilde{\upsilon}(t)$在闭区间$[a,\ b]$上连续，但对每一个$t\in[a,\ b]$，都有$|\tilde{\upsilon}(t)|<\|\upsilon\|$，所以$\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|\tilde{\upsilon}(t)|<\|\upsilon\|$，亦即$\|\tilde{\upsilon}(t)\|<\|\upsilon\|$。

**2.5 Haar唯一性定理**　设Y是实空间$C[a,\ b]$中的有限维子空间，则Y到每一个$x\in C[a,\ b]$最佳逼近唯一的充要条件是Y满足Haar条件。

**证** 充分性。假设Y满足Haar条件，但是，对于给定的$x\in C[a,\ b]$，有$y_1\in Y$，$y_2\in Y$都是Y到$x$的最佳逼近，并且令

$$v_1=x-y_1,\quad v_2=x-y_2$$

则有$\|v_1\|=\|v_2\|=\delta=\delta(x,\ Y)$。由引理1.5，蕴含着$y=(y_1+y_2)/2$亦是Y到$x$的最佳逼近。由引理2.4，函数

$$v=x-y=x-\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(v_1+v_2) \tag{9}$$

有至少$n+1$个极值点$t_1$，…，$t_{n+1}$，在每一个点$t_i$处，都有$|v(t_i)|=\|v\|=\delta$。于是，有

$$2v(t_i)=v_1(t_i)+v_2(t_i)=2\delta(\text{或}-2\delta) \tag{10}$$

但由前证，$|v_1(t_i)|\leqslant\|v_1\|=\delta$和$|v_2(t_i)|\leqslant\|v_2\|=\delta$。然而(10)式成立，说明$v_1(t_i)$，$v_2(t_i)$必有相同符号，且有最大绝对值。因此，$v_1(t_i)=v_2(t_2)=\delta(\text{或}-\delta,)$其中$i=1,2,\cdots,n+1$。这蕴含$y_1-y_2=v_2-v_1$在$[a,\ b]$中有$n+1$个零点，所以$y_1-y_2=0$，即$y_1=y_2$。

必要性。假设Y不满足Haar条件，下面证明，对于任意给定的$x\in C[a,\ b]$，最佳逼近不唯一。

由上假设与引理2.3的证明知，对于Y中的一组基和$[a,\ b]$中$n$个不同的值$t_1$，…，$t_n$，必有行列式(2)等于零，所以齐次线性方程组

$$\sigma_1y_k(t_1)+\sigma_2y_k(t_2)+\cdots+\sigma_ny_k(t_n)=0\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

有非零解$\sigma_1$，$\sigma_2,\cdots,\sigma_n$，因此，对于任意的$y=\sum\limits_{k=1}^{n}a_ky_k\in Y$，

得到

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i y(t_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left[\sum_{k=1}^{n}\sigma_i y_k(t_i)\right]=0 \tag{11}$$

因而其转置方程组

$$\beta_1 y_1(t_1)+\beta_2 y_2(t_2)+\cdots+\beta_n y_n(t_i)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

也有非零解$\beta_1,\cdots,\beta_n$，利用这一组解，定义 $y_0=\sum_{k=1}^{n}\beta_k y_k$，则 $y_0\neq 0$，并且$t_1,\cdots,t_n$ 是$y_0$的零点，取$\lambda$，使得$\|\lambda y_0\|\leqslant 1$。又令$z\in C[a,\ b]$，$\|z\|=1$，

$$z(t_i)=\operatorname{sgn}\sigma_i=\begin{cases}-1, & \text{如果}\sigma_i<0;\\ 1, & \text{如果}\sigma_i\geqslant 0。\end{cases}$$

定义$x\in C[a,\ b]$为

$$x(t)=z(t)(1-|\lambda y_0(t)|)$$

因为$y_0(t_i)=0$，则 $x(t_i)=z(t_i)=\operatorname{sgn}\sigma_i$，并且有$\|x\|=1$，现在来证明$Y$到该函数$x$有无穷多个最佳逼近。

利用$|z(t)|\leqslant\|z\|=1$和$|\lambda y_0(t)|\leqslant\|\lambda y_0\|\leqslant 1$，对于所有$\varepsilon\in[-1,\ 1]$，得到

$$\begin{aligned}|x(t)-\varepsilon\lambda y_0(t)|&\leqslant|x(t)|+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\&=|z(t)|(1-|\lambda y_0(t)|)+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\&\leqslant 1-|\lambda y_0(t)|+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\&=1-(1-|\varepsilon|)|\lambda y_0(t)|\leqslant 1\end{aligned}$$

如果对于一切$y\in Y$，成立着

$$\|x-y\|\geqslant 1 \tag{12}$$

则当$-1\leqslant\varepsilon\leqslant 1$时，每个$\varepsilon\lambda y_0$都是$Y$到$x$的最佳逼近。下证对于任意的$y=\sum_{k=1}^{n}a_k y_k$，(12) 式成立。假设存在着$\tilde{y}\in Y$，有$\|x-\tilde{y}\|<1$，则条件

$$x(t_i)=\text{sgn}\sigma_i=\pm 1$$

$$|x(t_i)-\tilde{y}(t_i)|\leqslant\|x-\tilde{y}\|<1$$

对于全体$\sigma_i\neq 0$，一齐蕴含着

$$\text{sgn}\tilde{y}(t_i)=\text{sgn}\ x(t_i)=\text{sgn}\sigma_i$$

这与（11）式矛盾。因为（11）式中，取$y=\tilde{y}$,对于某些$t$，$\sigma_i\neq 0$，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\tilde{y}(t_i)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\text{sgn}\sigma_i=\sum_{i=1}^{n}|\sigma_i|\neq 0.$$

所以，（12）式成立。

**2.6 定理** 在实空间$C[a,\ b]$中，子空间$Y_n$到任一元$x\in C[a,\ b]$的最佳逼近存在且是唯一的，其中$Y_n$由$y=0$以及次数不超过定自然数$n$的多项式组成。

此定理是前面一系列讨论的直接结果。

在这个定理中，我们对于各个$n$，特别当$n\to\infty$时会出现怎样的结果是非常关注的。设$\delta_n=\|x-P_n\|$，其中$P_n\in Y_n$是到已知元$x$的最佳逼近，因为$Y_0\subset Y_1\subset\cdots$，有单调序列

$$\delta_0\geqslant\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\cdots$$

则由Weierstrass定理推得$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$。

## 习　题

1. 设$x_1(t)=1$，$x_2(t)=t^2$，证明$Y=\text{Span}\{x_1,\ x_2\}$，满足Haar条件，其中$Y$视为：（Ⅰ）$C[0,\ 1]$的子空间；（Ⅱ）$C[-1,\ 1]$的子空间。在这两种情况下，研究到元$x=t^3$的逼近。

2. 证明：$Y=\text{span}\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}\subset C[a,\ b]$满足Haar条件当且仅当对于由几个不同点作成的每一数组$\{t_1,\ \cdots,\ t_n\}\subset[a,\ b]$，$n$个向量$v_i=(y_1(t_i),\ \cdots,\ y_n(t_i))$作成一个线性无关集，其中$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。

3. 设$Y \subset C[a, b]$满足Haar条件，$x \in C[a, b]$。如果$y \in Y$使得$x-y$在区间$[a,b]$中$n+1$个相邻点处，取正负交替的值，这里$n=\dim y$，证明，$Y$到$x$的最佳逼近的距离$\delta$至少要等于$x-y$在这$n+1$个点处的值的绝对值的最小值（这是De la vallèe定理）。

4. 在$C[0, 1]$中，设$x_1(t)=e^t$，$x_2(t)=\sin\frac{\pi t}{2}$，$Y:=\text{span}\{y_1, y_2\}$，其中$y_1(t)=1$，$y_2(t)=t$，求出$Y$到$x_1(t)$和$x_2(t)$的最佳逼近元。并与Taylor公式作比较。

5. 在上题中，假设给出的定义在区间$[a, b]$上的函数$x(t)$，其二阶导数在$[a, b]$上不变号。证明：此时，最佳逼近线性函数$y$为$y(t)=a_1+a_2 t$，其中

$$a_1=\frac{x(a)+x(c)}{2}-a_2\frac{a+c}{2}, \quad a_2=\frac{x(b)-x(a)}{b-a}$$

并且$c$是方程$x'(t)-y'(t)=0$的解。

## §3 Чебыщев多项式

前面一节主要从事于最佳逼近唯一性的理论研究。现在，我们期望找出最佳逼近的精确表达式。一个重要的工具，就是以俄国著名数学家的名字命名的Чебышев多项式。

**3.1 定义** 设$x \in C[a, b]$，$y \in Y$，其中$Y$是实空间$C[a, b]$的子空间，在$[a, b]$中，点集$\{t_0, \cdots, t_k\}$合于条件$t_0<t_1<\cdots<t_k$称为$x-y$的**交错集**，如果在$t_i$的相邻点处，$x(t_i)-y(t_i)$交替取值$\|x-y\|$和$-\|x-y\|$。

由定义2.1知道这$k+1$个点都是$x-y$的极值点，不过，在这些点处，$x-y$的值是正负相间的。

下面的引理给出了交错点集重要性的一个说明，它指出元$x-y$的充分大的交错集的存在性蕴含$y$是$Y$关于元$x$的最佳

逼近。其实，这个条件也是必要的。有兴趣的读者，可以参看E. W. Cheney编著的《逼近论导引》（1966）。

**3.2 引理** 设$Y$是实空间$C[a, b]$的子空间，满足Haar条件，给定$x\in C[a, b]$，令$y\in Y$是使得$x-y$存在着由$n+1$点组成的交错点集，这里，$n=\dim Y$，则$y$是$Y$到$x$的唯一的最佳逼近。

**证** 由定理1.2和定理2.5，存在着唯一的$Y$到$x$的最佳逼近。如果不是$y$，则另有$y_0\in Y$，使得

$$\delta=\|x-y_0\|<\|x-y\|$$

此不等式蕴含着在这$n+1$个极值点处，函数

$$y_0-y=(x-y)-(x-y_0)$$

与$x-y$具有相同的符号。这是因为在每一个极值点处，$x-y=\pm\|x-y\|$，而$x-y_0$其绝对值绝不会超过$\|x-y_0\|$，因此严格小于$\|x-y\|$。这说明$y_0-y$在这$n+1$个点处其值正负交错。由介值定理，$y_0-y$在区间$[a, b]$内至少有$n$个零点，这是不可能的，因为$Y$满足Haar条件且$y_0-y\in Y$，于是只有$y_0-y=0$，$y=y_0$。

一个重要的经典问题和引理3.2的直接应用是寻找对元$x\in C[-1, 1]$，

$$x(t)=t^n \qquad (n\in N\text{固定}) \tag{1}$$

的逼近，$Y=\text{span}\{y_0, \cdots, y_{n-1}\}$，其中

$$y_i(t)=t^i \qquad (i=0, 1, \cdots, n-1) \tag{2}$$

显然，这意味着寻找定义在区间$[-1, 1]$上，次数小于$n$的实多项式$y$去逼近$x$，这样的多项式总可以写成

$$y(t)=a_{n-1}t^{n-1}+a_{n-2}t^{n-2}+\cdots+a_1t+a_0$$

于是，

$$z(t)=x(t)-y(t)=t^n-(a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_0)$$

当然，我们希望找出$y(t)$，使得$\|z\|$尽可能地小。注意到$\|z\| = \|x-y\|$是$y$到$x$的距离，并且$z$是一个$n$次首一（最高次项系数为1）多项式，于是，问题化为：从首一$n$次多项式中，寻找多项式$z$,使得在区间$[-1, 1]$上与零的极大偏差最小。

如果令

$$t = \cos\theta \tag{3}$$

让$\theta$从0变到$\pi$，则$t$在区间$[-1, 1]$上变化。于是在$[0, \pi]$上，函数$\cos n\theta$有$n+1$个极值点，其值顺序交错取$\pm 1$。由引理3.2，我们希望$\cos n\theta$对于解决上述问题有所帮助，为此，我们写出$\cos n\theta$为$t=\cos\theta$的多项式。实际上，有

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{k=0}^{n-1}\beta_{n,k}\cos^k\theta \quad (n=1, 2, \cdots) \tag{4}$$

其中$\beta_{nk}$是常数。

**证** 当$n=1$时，（4）式成立（此时，取$\beta_{10}=0$即可）。

假设对于任意的$n$结论成立，我们来证明$n+1$时结论成立。因为有

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta,$$

$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta,$$

上两式相加，得到

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta\cos\theta \tag{5}$$

因此，由归纳法假设

$$\begin{aligned}\cos(n+1)\theta &= 2\cos n\theta\cos\theta - \cos(n-1)\theta \\ &= 2\cos\theta\left(2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{k=0}^{n-1}\beta_{n,k}\cos^k\theta\right) \\ &\quad - 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta - \sum_{k=0}^{n-2}\beta_{n-1,k}\cos^k\theta\end{aligned}$$

$$= 2^n\cos^{n+1}\theta + \sum_{k=0}^{n} \beta_{n+1,k}\cos^k\theta$$

这时，我们称函数

$$T_n(t) = \cos n\theta, \quad \theta = \arccos t \qquad (n = 0, 1, 2\cdots) \quad (6)$$

为第一类$n$次Чебышев多项式(*)。

在（4）式中，第一项的系数非一，而是$2^{n-1}$。下面介绍Чебышев多项式的最小性质。

**3.3 定理** 多项式

$$\widetilde{T}_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos t) \quad (n\geqslant 1) \qquad (7)$$

是区间$[-1, 1]$上的全体$n$次首一多项式中，在$[-1, 1]$上与零的极大偏差最小的多项式。

注意到本节开始讨论的最佳一致逼近问题，这个结论也可以表述为：取函数$x\in C[-1, 1]$，$x(t) = t^n$，$Y = \text{span}\{y_0, \cdots, y_{n-1}\}$，其中$y_i$由（2）式给定，定义$y$为

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{2^{n-1}}T_n(t) \qquad (n\geqslant 1) \qquad (8)$$

显然，(8) 式中最高次幂$t^n$消去，$y$关于$t$的次数不超过$n-1$，合于要求。

一般地，如果实$n$次多项式$\tilde{x}(t)$，它的首项为$\beta_n t^n$，我们期望找到$\tilde{y}$，使得在区间$[-1, 1]$上达到对$\tilde{x}$的最佳逼近。这里，$\tilde{y}$是至多为$n-1$次多项式。因为有$\tilde{x} = \beta_n x$。从定理3.3，

---

(*) 函数$U_n(t) = \sin n\theta$，$\theta = \arccos t$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 称为第二类$n$次Чебышев多项式。

必可断言

$$\frac{1}{\beta_n}(\tilde{x}-\tilde{y}) = \tilde{T}_n$$

其解为

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) - \frac{\beta_n}{2^{n-1}} T_n(t) \qquad (n \geqslant 1) \qquad (9)$$

显然（9）式较（8）式更一般些。

容易算出Чебышев多项式的前几项。易知$T_0(t) = \cos 0 = 1$，$T_1(t) = \cos\theta = t$，利用（5）、（6）式，推得

$$T_{n+1}(t) + T_{n-1}(t) = 2t\, T_n(t)$$

则有 $T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$

所以

$$T_0(t) = 1, \qquad T_1(t) = t,$$
$$T_2(t) = 2t^2 - 1, \qquad T_3(t) = 4t^3 - t,$$
$$T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1, \qquad T_5(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$T_n(t) = \frac{n}{2}\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^i \frac{(n-i-1)!}{i!\,(n-2i)!}(2t)^{n-2i}$$

$(n = 1, 2, \cdots)$

这里

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{如果}n\text{是正偶数；} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{如果}n\text{是正奇数。} \end{cases}$$

## 习　　题

1． 若已知$x(t)=t^3-t^2$，$t\in[-1, 1]$，求出最佳逼近$y$，其中，$y$是二次多项式．最大偏差是多少？

2． 证明Чебышев多项式$T_n$的所有零点都是实的、单根，并且全部在区间$[-1, 1]$中．

3． 证明：$T_n$与$T_{n-1}$没有公共的零点．

4． 证明：任意次数为$n\geqslant 1$的实多项式$x\in C[a, b]$，具有首项$\beta_n t^n$，则

$$\|x\|\geqslant|\beta_n|\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

5． 证明：在空间$L^2[-1, 1]$中，函数$(1-t^2)^{-\frac{1}{4}}T_n(t)$是正交的，亦即

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}T_n(t)T_m(t)dt=0 \qquad (m\neq n)$$

并证明当$n=m=0$时，此积分为$\pi$；当$n=m=1, 2, \cdots$时，此积分为$\pi/2$。

6． 证明：$T_n$是下面微分方程

$$(1-t^2)T_n''-tT_n'+n^2T_n=0$$

的解．

# §4 Hilbert空间中的逼近

由定理1.9，对于Hilbert空间H的给定元$x$，和闭子空间$Y$，则$Y$到$x$的最佳逼近存在且唯一。实际上，由第四章定理2.9，有

$$H=Y\oplus Z \qquad (Z=Y^{\perp}) \tag{1}$$

则任意$x\in H$，

$$x=y+z \tag{2}$$

其中$z=x-y\perp y$，因此，$\langle x-y, y\rangle=0$。如果$Y$是有限维子空间，$\dim Y=n$，$y$必由$Y$的一组基$\{y_1, \cdots, y_n\}$确定，于是

$$y=a_1y_1+\cdots+a_ny_n \tag{3}$$

由$x-y\perp Y$，则$x-y\perp y_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，

$$\begin{aligned}\langle y_i, x-y\rangle &= \langle y_i, x-\sum_{k=1}^{n}a_ky_k\rangle \\ &= \langle y_i, x\rangle-\bar{a}_1\langle y_i, y_1\rangle-\cdots-\bar{a}_n\langle y_i, y_n\rangle \\ &=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)\end{aligned} \tag{4}$$

（4）式是一个关于$\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_n$的非齐次线性方程组。因为$y$存在且唯一，根据Cramer法则，其系数行列式不为零，亦即有

$$G(y_1, \cdots, y_n)=\begin{vmatrix}\langle y_1, y_1\rangle & \langle y_1, y_2\rangle & \cdots & \langle y_1, y_n\rangle \\ \langle y_2, y_1\rangle & \langle y_2, y_2\rangle & \cdots & \langle y_2, y_n\rangle \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \langle y_n, y_1\rangle & \langle y_n, y_2\rangle & \cdots & \langle y_n, y_n\rangle\end{vmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

并且（4）的解为

$a_i=\dfrac{\overline{G_i}}{\overline{G}}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，其中$G_i$是用 $\begin{pmatrix}\langle y_1, x\rangle \\ \langle y_2, x\rangle \\ \vdots \\ \langle y_n, x\rangle\end{pmatrix}$

去换（5）式中第$i$列所得的行列式。

**4.1 定理** Hilbert空间$H$中的元$y_1, y_2, \cdots, y_n$作成线性无关集的充要条件是

$$G(y_1, \cdots, y_n) \neq 0$$

**证** 前面的讨论证明了：若$y_1, \cdots, y_n$线性无关，则行列式$G(y_1, \cdots, y_n) \neq 0$。

反之，如果$\{y_1, \cdots, y_n\}$线性相关，则其中必有一个向量$y_{i_0}$可用其它向量线性表示，则行列式$G$的第$i_0$列可以表成其它列的线性组合，于是$G=0$，矛盾。

**4.2 定理** 如果（1）式中，还有$\dim Y<\infty$，且$\{y_1, \cdots, y_n\}$是$Y$中的一组基，则

$$\|z\|^2 = \frac{G(x, y_1 \cdots, y_n)}{G(y_1, \cdots, y_n)} \tag{6}$$

其中

$$G(x, y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y_1\rangle & \cdots & \langle x,y_n\rangle \\ \langle y_1,x\rangle & \langle y_1,y_1\rangle & \cdots & \langle y_1,y_n\rangle \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \langle y_n,x\rangle & \langle y_n,y_1\rangle & \cdots & \langle y_n,y_n\rangle \end{vmatrix}$$

**证** 由前面的讨论，总有$\langle y, z\rangle = 0$，这里$z=x-y$，由（3）式，得到

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \langle z, z\rangle + \langle y, z\rangle = \langle x, x-y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \langle x, \sum_{k=1}^{n} a_k y_k\rangle, \end{aligned}$$

于是，有

$$-\|z\|^2 + \langle x, x\rangle - \bar{a}_1 \langle x, y_1\rangle - \cdots - \bar{a}_n \langle x, y_n\rangle = 0 \tag{7}$$

利用方程组（4）：

$$\langle y_i, x\rangle - \bar{a}_1\langle y_i, y_1\rangle - \cdots - \bar{a}_n\langle y_i, y_n\rangle = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

将（7）式与（4）式合起来，作成一个有$n+1$个方程、$n+1$个未知数$1, -\bar{\alpha}_1, \cdots, -\bar{\alpha}_n$的齐次线性方程组。显然，无论$-\bar{\alpha}_1, -\bar{\alpha}_2, \cdots, -\bar{\alpha}_n$如何取值，新方程组都有非零解，于是，其系数行列式必为零，亦即

$$0=\begin{vmatrix} \langle x, x\rangle-\|z\|^2 & \langle x, y_1\rangle & \cdots & \langle x, y_n\rangle \\ \langle y_1, x\rangle & \langle y_1, y_1\rangle & \cdots & \langle y_1, y_n\rangle \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \langle y_n, x\rangle & \langle y_n, y_1\rangle & \cdots & \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix} \tag{8}$$

$$=\begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y_1\rangle & \cdots & \langle x, y_n\rangle \\ \langle y_1, x\rangle & \langle y_1, y_1\rangle & \cdots & \langle y_1, y_n\rangle \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \langle y_n, x\rangle & \langle y_n, y_1\rangle & \cdots & \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} -\|z\|^2 & \langle x, y_1\rangle & \cdots & \langle x, y_n\rangle \\ 0 & \langle y_1, y_1\rangle & \cdots & \langle y_1, y_n\rangle \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \langle y_n, y_1\rangle & \cdots & \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix}$$

$$=G(x, y_1, \cdots, y_n)-\|z\|^2 G(y_1, \cdots, y_n)$$

但是，定理4.1指出$G(y_1, \cdots, y_n)\neq 0$，所以

$$\|z\|^2=\frac{G(x, y_1, \cdots, y_n)}{G(y_1, \cdots, y_n)}$$

如果Y中的基$\{y_1, \cdots, y_n\}$还是正交规范集，则有$G(y_1, \cdots, y_n)=1$，将$G(x, y_1, \cdots, y_n)$按第一行展开，并且注意到

$$\langle x, y_k\rangle\langle y_k, x\rangle=|\langle x, y_k\rangle|^2 \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

则

$$G(x, y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y_1\rangle & \cdots & \langle x, y_n\rangle \\ \langle y_1, x\rangle & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \langle y_n, x\rangle & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, y_k\rangle|^2$$

代入（6）式，推得

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, y_k\rangle|^2$$

这其实是第四章§3中的结果。

## 习　　题

1．证明：改变$y_1, \cdots, y_n$的排列顺序，不会改变行列式$G(y_1, \cdots, y_n)$的值。

2．如果$G(y_1, \cdots, y_n) \neq 0$，证明$G(y_1, \cdots, y_k) \neq 0$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$。当$G(y_1, \cdots, y_n)=0$时，请找出类似的关系．

3．利用Gram行列式表示Schwarz不等式．并利用定理4.1，得出不等式取等号的条件．

4．证明$G(y_1, \cdots, y_n) \geqslant 0$，据此证明：Hilbert空间中的有限子集是线性无关的，当且仅当这些元作成的Gram行列式取正值。

5．设$A=\{y_1, \cdots, y_n\}$是Hilbert空间$H$中的线性无关集，证明：对于任意子集$\{y_k, \cdots, y_m\}$（其中$k<m<n$），有

$$\frac{G(y_k, \cdots, y_n)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_n)} \leqslant \frac{G(y_k, \cdots, y_m)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_m)}$$

并证明

$$\frac{G(y_m, \cdots, y_n)}{G(y_{m+1}, \cdots, y_n)} \leqslant G(y_m)$$

6．证明：Hilbert空间$H$中的线性无关子集$\{x_1, x_2, \cdots\}$在$H$中

稠，当仅当对且于任意$x \in H$，

$$\frac{G(x, x_1, \cdots, x_n)}{G(x_1, \cdots, x_n)} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

## §5 样条逼近

所谓样条逼近，简言之，就是用若干个分段多项式去逼近一个已知函数。如果给定区间$[a, b]$上的函数$x(t)$（例如连续函数），将区间$[a, b]$作一个分划$P_n$：

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \tag{1}$$

于是，$[a, b]$分成了$n$个小区间$[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，在每一个小区间上，用一个多项式$P_k$来代替（逼近）$x$，要求在区间端点处，有

$$P_k(t_i) = x(t_i) \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

当然，对于这$n$个多项式应该有一些要求，例如，它们应该是二阶连续可微的等等。于是，我们作出的对$x$的逼近$y(t)$就由$n$个特殊的多项式合成。这样特殊的逼近就是样条逼近。

大家熟知的插值法，例如**Lagrange插值公式***是在全区间$[a,b]$上用一个$n$次多项式$L_n(t)$去近似表示给定函数$x(t)$，

---

(*) **Lagrange插值公式**：给定定义在区间$[a,b]$上的函数$x(t)$，则对于由（1）式决定的分法$P_n$，$x_k = x(t_k)$ $(k=0, 1, \cdots, n)$，有

$$x(t) \approx L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^{i} \left(\frac{t - t_k}{t_i - t_k}\right) x_i$$

这里，$L_n(t_i) = x(t_i) = x_i$ $(i=0, 1, \cdots, n)$，$L_n(t)$称为Lagrange插值多项式。

使得在分点$t_i$处有$L_n(t_i)=x(t_i)$。显然，样条逼近与插值方法是有区别的，前者有更大的灵活性，适用范围更广，因而是实际应用中更常用的一种逼近方法。

具体说来，给区间$[a, b]$一个分法$P_n$：

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

其中分点$t_i$也称为结点，如果函数$y(t)$满足条件

(S1) $y(t_i)=x(t_i) \quad (i=0, 1, \cdots, n)$；

(S2) 在每一个区间$[t_{i-1}, t_i]$上，$y(t)$是不超过三次的多项式；

(S3) 在区间$[a, b]$上，$y(t)$二阶可导；

则称$y(t)$是分法$P_n$关于$x(t)\in C[a,b]$的一个**三次样条逼近**。这时，把对应于分法$P_n$，全体三次样条作成的线性空间记为$Y(P_n)$。

下面，着重讨论样条逼近的唯一性问题。

**定理** 设$x(t)$是定义在$[a, b]$上的实值函数，$P_n$是$[a, b]$形如（1）的任意分法，$k'_0$和$k'_n$是两个任给实数，则存在着唯一的三次样条$y\in Y(P_n)$满足下述条件

(Ⅰ) $y(t_i)=x(t_i) \quad (i=0, 1, \cdots, n)$

(Ⅱ) $y'(t_0)=k'_0, \quad y'(t_n)=k'_n \qquad (2)$

**证** 由（S2），在每个子区间$I_i=[t_i, t_{i+1}]\subset[a,b]$ $(i=0, 1, \cdots, n-1)$上，三次样条函数$y$化为一个三次多项式$P_i$，并合于条件

$$\begin{aligned}&P_i(t_i)=x(t_i);\\&P_i(t_{i+1})=x(t_{i+1});\\&P'_i(t_i)=k'_i; \qquad (i=0, 1, \cdots, n-1) \qquad (3)\\&P'_i(t_{i+1})=k'_{i+1}\end{aligned}$$

且具有给定常数$k'_0$和$k'_n$以及由以后给出的$k'_1, \cdots, k'_{n-1}$。记

$\tau_i = 1/(t_{i+1} - t_i)$，只要取三次多项式为

$$P_i(t) = x(t_i)\tau_i^2(t - t_{i+1})^2[1 + 2\tau_i(t - t_i)]$$
$$+ x(t_{i+1})\tau_i^2(t - t_i)^2[1 - 2\tau_i(t - t_i)]$$
$$+ k'_i\tau_i^2(t - t_i)(t - t_{i+1})^2$$
$$+ k'_{i+1}\tau_i^2(t - t_i)^2(t - t_{i+1})$$

直接计算，可以验证$P_i(t)$ 在子区间$[t_i,\ t_{i+1}]$上满足（3）式中所有 4 组条件。求两次导数，得到

$$P''_i(t_i) = -6\tau_i^2 x(t_i) + 6\tau_i^2 x(t_{i+1}) - 4\tau_i k'_i - 2\tau_i k'_{i+1} \quad (4)$$

$$P''_i(t_{i+1}) = 6\tau_i^2 x(t_i) - 6\tau_i^2 x(t_{i+1}) + 2\tau_i k'_i + 4\tau_i k'_{i+1} \quad (5)$$

由（S3），所以，在结点$t_i$处，两个相邻多项式二阶导数相等：

$$P''_{i-1}(t_i) = P''_i(t_i) \qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

在（5）式中，用$i-1$代替$i$，又由（4）式，推得形如

$$\tau_{i-1}k'_{i-1} + 2(\tau_{i-1} + \tau_i)k'_i + \tau_i k'_{i+1} = 3[\tau_{i-1}^2\triangle x_i + \tau_i^2\triangle x_{i+1}]$$

的$n-1$个方程作成的线性方程组，其中$\triangle x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$，$\triangle x_{i+1} = x(t_{i+1}) - x(t_i)$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，该线性方程组有唯一一组解$k'_1,\ \cdots,\ k'_{n-1}$。这是因为其系数行列式中每一个元都是非负的。并且每一行中，其它元之和都没有主对角线上的元素大。于是矩阵正定，其行列式大于零，所以，非齐次线性方程组有唯一一组解。

这就唯一确定了在结点处，$y(t)$的一阶导数值$k'_1,\ \cdots,\ k'_{n-1}$，据此，$y$唯一确定。

三次样条逼近，实际上具备一种极小性质。进一步假设定理中已知函数$x(t)$ 在区间$[a,\ b]$二阶连续可导，则（3）式中，取

$$y'(a) = x'(a),\ y'(b) = x'(b) \qquad (6)$$

则当$t = a$或$t = b$时，有$x' - y'$为零，分部积分之，得到

$$\int_a^b y''(t)[x''(t)-y''(t)]dt$$

$$=[x'(t)-y'(t)]y''(t)\Big|_a^b-\int_a^b y'''(t)[x'(t)-y'(t)]dt$$

$$=-\int_a^b y'''(t)[x'(t)-y'(t)]dt$$

$$=y'''(t)[y(t)-x(t)]\Big|_a^b=0$$

这里已经使用了在每一个分法中，$y'''(t)$在每一个子区间上均是常数的事实。于是

$$\int_a^b [x''(t)-y''(t)]^2dt$$

$$=\int_a^b [x''(t)]^2dt-2\int_a^b x''(t)y''(t)\,dt+\int_a^b [y''(t)]^2dt$$

$$=\int_a^b [x''(t)]^2dt-\int_a^b [y''(t)]^2dt\geqslant 0$$

所以，当$x(t)$在区间$[a,b]$二阶连续可导时，关于区间$[a,b]$的分法$P_n$，$y(t)\in Y(P_n)$，必有

$$\int_a^b [x''(t)]^2dt\geqslant\int_a^b [y''(t)^2]dt \qquad (7)$$

成立。(7) 式取等号时当且仅当$x$就是三次样条函数$y$。这就说明了三次样条逼近的极小性质。

工程中，长时期把经过一个已知点，具有适当曲线形状的细杆叫做样条，而每一个样条减少的拉力能量近似地与样条的二阶导数的平方成比例，这就是（7）式的物理意义。

至于高阶样条、多变元样条；收敛性问题，应用及其它问题，这里从略。有兴趣的读者可以参考其它有关文献。

## 习　题

1. 证明$Y(P_n)$是线性空间．它的维数是多少？

2. 证明：对于形如（1）式的分法$P_n$，存在着唯一的$n+1$个样条$y_0$，…，$y_n$，使得

$$y_i(t_k)=\delta_{ik},\qquad y_i'(a)=y_i'(b)=0$$

利用这组结果，怎样作出$Y(P_n)$的一组基？

3. 在区间$[-1,\ 1]$上，给定$x(t)=t^4$，对于分法$P_2=\{-1,\ 0,\ 1\}$，作出三次样条逼近，以及次数不超过3的Чебышев近似，比较这两个结果。

4. 对于$x$，$y\in C^2[a,\ b]$（这里，$C^2[a,\ b]$表示在区间$[a,\ b]$上具有连续的二阶导数的全体函数作成的空间），定义

$$\langle x,\ y\rangle_2=\int_a^b x''(t)y''(t)dt,\ P(x)=\langle x,\ x\rangle_2^{1/2}$$

证明：$P$是一个半范数但不是范数．

5. 证明：对于任意$x\in C^2[a,\ b]$，其样条函数是$y$，则可以借助于$P$来估计误差：

$$||x-y||_2\leqslant p(x)$$

这个估计式与分法$P_n$的选择无关。

# 第六章　有界线性算子谱理论初步

算子谱理论是现代泛函分析及其应用的一个重要分支。粗略地说，它与算子的某确定的逆算子有关，而它的一般性质又要取决于所给算子本身。逆算子的问题所以重要，是因为它与解方程（代数方程组、微分方程、积分方程）的问题，例如Sturm、Liouville边值问题的研究以及积分方程中著名的Fredholm理论等密切相关，并且这些问题都对该领域的发展起了重要作用。

另一方面，谱理论对于理解算子本身以及算子理论亦很重要。

谱理论是一个内容丰富的领域，本章只作简要的讨论。

## §1　基本概念

假设$X\neq\{0\}$是复线性赋范空间，$T$：$\mathscr{D}(T)\longrightarrow X$是个线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$，则相应于$T$的算子为

$$T_\lambda = T-\lambda I \tag{1}$$

其中$\lambda$是复数，$I$是定义在$\mathscr{D}(T)$上的恒同算子。如果$T_\lambda$有逆，表示成$R_\lambda(T)$，于是

$$\mathscr{R}_\lambda(T)=T_\lambda^{-1}=(T-\lambda I)^{-1} \tag{2}$$

称为$T$的**预解算子**或简称$T$的**预解式**。如果不会发生混淆，也经常用$R_\lambda$代替$R_\lambda(T)$。

自然，算子$T_\lambda$和$R_\lambda$的许多性质都依赖于复数$\lambda$，而谱理论总与这些性质相联系。例如，我们希望了解在复平面上使得$R_\lambda$存在的所有$\lambda$的集合；算子$R_\lambda$是否线性有界？什么样的$\lambda$使得$R_\lambda$的定义域在$X$中稠？等等。

由第三章定理6.4（Ⅱ）知，$R_\lambda(T)$是线性算子。

**1.1 定义** 设$X\neq\{0\}$是复赋范空间，$T$：$\mathscr{D}(T)\longrightarrow X$是线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$，若复数$\lambda$使得

（$R$Ⅰ） $R_\lambda(T)$存在；

（$R$Ⅱ） $R_\lambda(T)$有界；

（$R$Ⅲ） $R_\lambda(T)$定义在$X$中的稠集上；

则称$\lambda$是$T$的**正则值**。$T$的正则值$\lambda$的全体作成的集合，叫做$T$的**预解集**，记为$\rho(T)$。它关于复平面$C$的补集$\sigma(T)=C-\rho(T)$叫作$T$的**谱集**。$\lambda\in\sigma(T)$叫做$T$的**谱值**（或**谱点**）。

谱集$\sigma(T)$又可分成三个互不相同的集：

**点谱**或**离散谱**$\sigma_p(T)$是使得$R_\lambda(T)$不存在的集，$\lambda\in\sigma_p(T)$称为$T$的**特征值**。

**连续谱**$\sigma_c(T)$是使得$R_\lambda(T)$存在并且满足（$R$Ⅲ）但不满足（$R$Ⅱ），即使得$R_\lambda(T)$无界的集。

**剩余谱**$\sigma_r(T)$是使得$R_\lambda(T)$存在（但是可以有界或无界）但不满足（$R$Ⅲ），即$R_\lambda(T)$的定义域不在$X$中稠的集。

显然，有

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(\Gamma)\cup\sigma_r(T)$$

注意：定义1.1中的集合可以是空集。由线性代数知识，在有限维空间$X$中，线性算子$T$：$X\to X$，则有$\sigma_c(T)=\sigma_r(T)=\phi$，即有限维空间中线性算子的谱是纯点谱，都是$T$的特征值。

我们把定义1.1中的条件列表如下：

| 满　　足 | 不　满　足 | $\lambda$ 属　于 |
|---|---|---|
| (R Ⅰ)　(R Ⅱ)　(R Ⅲ) | | $\rho(T)$ |
| | (R Ⅰ) | $\sigma_P(T)$ |
| (R Ⅰ)　(R Ⅲ) | (R Ⅱ) | $\sigma_C(T)$ |
| (R Ⅰ) | (R Ⅲ) | $\sigma_r(T)$ |

由前述，预解式$R_\lambda(T)$若存在则是线性的。然而$R_\lambda(T)$：$\mathscr{R}(T_\lambda)\longrightarrow\mathscr{D}(T_\lambda)$ 存在当且仅当$T_\lambda x=0$蕴含$x=0$。因此，如果对于$x\neq0$，有$T_\lambda x=(T-\lambda I)x=0$，则由定义1.1，有$\lambda\in\sigma_p(T)$，亦即$\lambda$是$T$的**特征值**。向量$x\neq0$称为$T$对应于特征值$\lambda$的**特征向量**（如果$X$是函数空间，又称$x$为$T$的相应于$\lambda$的特征函数）。由零和线性算子$T$对应于特征值$\lambda$的全部特征向量作成定义域$\mathscr{D}(T)$的线性子空间，称为$T$对应于特征值$\lambda$的特征子空间。这显然与有限维空间中的情形是一致的。

在Hilbert空间中，若$T$是有界自伴线性算子，则$\sigma_r(T)=\phi$，于是$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)$。

如果$X$是无限维赋范空间，则可能$\lambda_0$是算子$T$的谱值但非$T$的特征值。

**1.2　例**　在Hilbert空间$H=l^2$中，定义线性算子$T$：$l^2\to l^2$为

$$(\xi_1,\ \xi_2\cdots)\longmapsto(0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)\tag{3}$$

其中$x=(\xi_i)\in l^2$，算子$T$称为右移算子。显然$T$是有界的，因为

$$\|Tx\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2=\|x\|^2$$

算子$R_0(T)=T^{-1}$：$T(H)\to H$存在。实际上，它是左移算子：

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots) \longmapsto (\xi_2, \xi_3 \cdots)$$

但是$R_0(T)$不满足（$R$Ⅲ），因为（3）式说明$T(H)$不在$H$中稠。实际上，$T(H)$是由所有的$y=(\eta_i)\in l^2$，但$\eta_1=0$组成的子空间。因此，由定义1.1，$\lambda=0$是$T$的谱值。然而，$\lambda=0$不是特征值，因为从$Tx=0$蕴含$x=0$。

从第三章中的有界逆定理11.7知，如果$X$是Banach空间，$T$：$X\to X$的有界线性算子，若对于复数$\lambda$，预解算子$R_\lambda(T)$存在且在全空间$X$上有定义，则对应于$\lambda$，$R_\lambda(T)$有界。

**1.3 引理** 设$X$是复Banach空间，$T$：$X\to X$是线性算子，且$\lambda\in\rho(T)$，如果（Ⅰ）$T$是闭算子；或（Ⅱ）$T$有界。则$R_\lambda(T)$定义在全空间$X$上且是有界的。

## 习　题

1．设$X$是赋范空间，则恒同算子$I$的特征值与相应的特征空间是什么？并求出$\sigma(I)$和$R_\lambda(I)$．

2．（不变子空间）赋范空间$X$的子空间$Y$称为关于线性算子$T$：$X\to X$是不变的，如果$T(Y)\subset Y$．证明：$T$的特征空间是关于$T$的不变子空间，并举例说明之。

3．如果$T$是有界线性算子，$T_1$是$T$的一个线性延拓，证明：$\sigma_p(T)\subset\sigma_p(T_1)$。并且对于任意$\lambda\in\sigma_p(T)$，$T$的特征空间含于$T_1$的特征空间中．

4．证明：在上题中$\sigma_r(T_1)\subset\sigma_r(T)$；$\sigma_c(T)\subset\sigma_c(T_1)\cup\sigma_p(T_1)$，因而$\rho(T_1)\subset\rho(T)\cup\sigma_r(T)$．

# §2 有界线性算子的谱性质

谱的性质依赖于所考虑的算子所定义的空间类型以及算子的类型，这从前节的讨论中可以看出。这就使人们想到，把具有相同谱性质的一大类算子分开来单独进行讨论。本节

主要研究定义在复Banach空间$X$中的有界线性算子$T$的谱性质。

**2.1 定理** 设$T\in B(X, X)$，这里$X$是Banach空间，如果$\|T\|<1$，则$(I-T)^{-1}$存在，是定义在全空间X上的有界线性算子，并且

$$(I-T)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}T^i=I+T+T^2+\cdots \qquad (1)$$

**证** 由第三章§7（7）式，有$\|T^i\|\leqslant\|T\|^i$，当$\|T\|<1$时，几何级数$\sum_{i=0}^{\infty}\|T\|^i$收敛，于是，级数（1）在条件$\|T\|<1$下绝对收敛，由于X完备，由第三章定理10.2，$B(X, X)$亦完备，所以，绝对收敛蕴含收敛。用$S$表示（1）中级数的和，我们来证明$S=(I-T)^{-1}$。为此，有

$$\begin{aligned}&(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^n)\\&=(I+T+T^2+\cdots+T^n)(I-T)\\&=I-T^{n+1}\end{aligned} \qquad (2)$$

当$n\to\infty$时，必有$T^{n+1}\longrightarrow 0$，于是，推得

$$(I-T)S=S(I-T)=I, \qquad (3)$$

因此有$S=(I-T)^{-1}$。

**2.2 定理** 复Banach空间X中的有界线性算子$T$的预解集$\rho(T)$是开集，因此，谱集$\sigma(T)$是闭集。

**证** 如果$\rho(T)=\phi$，则已是开集（实际上，从定理2.4知$\rho(T)\neq\phi$）。不妨设$\rho(T)\neq\phi$，对于固定的$\lambda_0\in\rho(T)$和$\lambda\in C$，有

$$\begin{aligned}T-\lambda I&=T-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I\\&=(T-\lambda_0 I)[I-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 I)^{-1}]\end{aligned}$$

可改写成

$$T_\lambda = T_{\lambda_0}V,\ \text{其中}V = I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0} \tag{4}$$

因为$\lambda_0\in\rho(T)$且$T$有界，由引理1.3（Ⅱ），得到$R_{\lambda_0}=T_{\lambda_0}^{-1}\in B(X, X)$。同时，定理2.1说明$V$有逆

$$V^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}[(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^i=\sum_{i=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^iR_{\lambda_0}^i \tag{5}$$

在$B(X, X)$中，对于使得$\|(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}\|<1$的所有$\lambda$成立，亦即

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|} \tag{6}$$

由于$T_{\lambda_0}^{-1}=R_{\lambda_0}\in B(X, X)$，据此和（4）式，对于满足（6）式的每一个$\lambda$，算子$T_\lambda$有逆

$$R_\lambda=T_\lambda^{-1}=(T_{\lambda_0}V)^{-1}=V^{-1}R_{\lambda_0} \tag{7}$$

所以，由（6）式所决定的$\lambda_0$的邻域内的$\lambda$全部是算子$T$的正则值。又由$\lambda_0\in\rho(T)$的任意性，$\rho(T)$是开集。因此，其补集$\sigma(T)=C-\rho(T)$是闭集。

在定理证明中，我们把预解式表示成$\lambda$的幂级数，从(5)、(6)、(7)式，直接推出下述定理。

**2.3 定理** 对于定理2.2中的X和$T$，以及任意$\lambda_0\in\rho(T)$，预解式$R_\lambda(T)$有表示

$$R_\lambda=\sum_{i=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^iR_{\lambda_0}^{i+1}, \tag{8}$$

级数对复平面$C$中给定的开圆盘

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$$

中所有的$\lambda$皆绝对收敛，而此圆盘是$\rho(T)$的子集。

这个表示定理，也可以通过复分析得出。定理2.1的另一个应用是可以借助于它来证明这样一个重要结论：对于有界线性算子而言，谱是复平面中的一个有界集。

**2.4 定理** 复Banach空间$X$中的有界线性算子$T$：$X\to X$的谱$\sigma(T)$是紧的，且落在圆盘

$$|\lambda|\leqslant\|T\| \tag{9}$$

中，因此，$T$的预解集$\rho(T)$非空。

**证** 设$\lambda\neq 0$，$\mu=1/\lambda$，由定理2.1，有表示

$$R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}(I-\mu T)^{-1}$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}(\mu T)^i=-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^i \tag{10}$$

这里，由定理2.2，级数对于满足条件

$$\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|=\frac{\|T\|}{|\lambda|}<1,\quad \text{即}|\lambda|>\|T\|$$

的一切$\lambda$收敛。又由定理2.2知，这样的$\lambda\in\rho(T)$，即都是$T$的正则值，因此，谱集$\sigma(T)=C-\rho(T)$必全在圆盘（9）中，于是，$\sigma(T)$有界。但定理2.2指出$\sigma(T)$闭，故$\sigma(T)$是$C$中的有界闭集，$\sigma(T)$是紧集。

定理2.4指出：复Banach空间中$X$的有界线性算子$T$的谱，必含于以原点为中心的一个圆盘中；那么，包含$\sigma(T)$的最小圆盘是什么？

**2.5 定义** 设$T\in B(X,X)$，其中$X$是复Banach空间，则以复平面$C$的原点为中心的，包含$\sigma(T)$的最小闭圆盘的半径，称为算子$T$的**谱半径**，记为$r_\sigma(T)$，于是$r_\sigma(T)=$

$\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$。

由定理2.4和定义2.5，若$X$是复Banach空间，$T\in B(X, X)$，则

$$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|$$

事实上，我们还有很重要的结果，见下述定理。

**2.6 定理** 如果$X\neq\{0\}$是复Banach空间，$T\in B(X, X)$，则

（Ⅰ）$\sigma(T)\neq\phi$；

（Ⅱ）$r_\sigma(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}$。

定理中的结论（Ⅱ）由苏联数学家Гельфанд，И．М 1941年首先得到。

## 习　　题

1．设$X=C[0, 1]$，$T$：$X\longrightarrow X$，$Tx=vx$，其中$v\in X$固定，求$\sigma(T)$．

2．作一个线性算子$T$：$C[0, 1]\longrightarrow C[0, 1]$，使得它的谱是给定区间$[a, b]$。

3．设$T$：$l^2\longrightarrow l^2$，定义成$y=Tx$，$x=(\xi_i)$，$y=(\eta_i)$，$\eta_i=\alpha_i\xi_i$，其中$(\alpha_i)$在$[0, 1]$中稠，求$\sigma_p(T)$和$\sigma(T)$．

4．上题中，如果$\lambda\in\sigma(T)-\sigma_p(T)$，证明：$R_\lambda(T)$无界．

5．设$T\in B(X, X)$，这里$X$是复Banach空间，证明：当$\lambda\longrightarrow\infty$时，$\|R_\lambda(T)\|\longrightarrow0$．

6．设$X=C[0, \pi]$，$T$：$D(T)\longrightarrow X$，$x\longmapsto x''$，其中

$$D(T)=\{x\in X|x', x''\in X, x(0)=x(\pi)=0\}$$

证明：$\sigma(T)$不紧．

（这里，$x'$，$x''$分别表示$x$关于自变量$t$的一阶和二阶导数）。

## §3 谱映射定理

本节进一步研究谱和预解集的一些重要且基础的性质。

**3.1 定理** 设$X$是复Banach空间，$T\in B(X, X)$且$\lambda$，$\mu\in\rho(T)$，则

（Ⅰ）$T$的预解式$R_\lambda$满足Hilbert关系或预解方程

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu-\lambda)R_\mu R_\lambda \tag{1}$$

（Ⅱ）$R_\lambda$与任何可与$T$可换的$S\in B(X, X)$可换；

（Ⅲ）$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$。 (2)

**证** （Ⅰ）由引理1.3，$T_\lambda$的值域是全空间$X$，因此，$I=T_\lambda R_\lambda$，这里$I$是$X$中的恒同算子。虽然也有$I=R_\mu T_\mu$，所以

$$\begin{aligned}R_\mu - R_\lambda &= R_\mu(T_\lambda R_\lambda)-(R_\mu T_\mu)R_\lambda\\ &= R_\mu(T_\lambda - T_\mu)R_\lambda\\ &= R_\mu[T-\lambda I-(T-\mu I)]R_\lambda\\ &= (\mu-\lambda)R_\mu R_\lambda\end{aligned}$$

（Ⅱ）由假设有$ST=TS$，因此，$ST_\lambda = T_\lambda S$，利用$I=T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda$，推得

$$R_\lambda S = R_\lambda S T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda S R_\lambda = SR_\lambda$$

（Ⅲ）若$\lambda=\mu$，显然$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$。现设$\lambda\neq\mu$，则由(Ⅰ)，

$$R_\mu R_\lambda = \frac{1}{\mu-\lambda}(R_\mu - R_\lambda) = \frac{1}{\lambda-\mu}(R_\lambda - R_\mu) = R_\lambda R_\mu。$$

现在讨论重要的谱映射定理，它实质上是矩阵理论中Kelly-Hamilton定理在无限维空间中的推广。

大家知道，如果$\lambda$是方阵$A$的一个特征值，则有$x\neq 0$，使得$Ax=\lambda x$，于是

$$A^2x = AAx = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

继续作下去，则对于每一个正整数$m$，有

$$A^m x = \lambda^m x$$

这说明，如果$\lambda$是方阵$A$的特征值，则$\lambda^m$是方阵$A^m$的特征值。

一般，$P(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0$是矩阵

$$P(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_0 I$$

的特征值。

我们要证明的正是此性质在任意维的复Banach空间中对于有界线性算子仍成立。下面先引入一个记号：

$$P(\sigma(T)) = \{\mu \in C|_{\mu = P(\lambda),\quad \lambda\in\sigma(T)}\} \tag{3}$$

亦即，$P(\sigma(T))$是使得$\mu = P(\lambda)$的全体复数作成的集合，这里$\lambda\in\sigma(T)$。记号$P(\rho(T))$亦有同样意义，只是这里$\lambda\in\rho(T)$。

**3.2 关于多项式的谱映射定理** 设X是复Banach空间，$T\in B(X, X)$，且

$$P(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

则

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)) \tag{4}$$

亦即，算子$P(T) = \alpha_n T^n + \alpha_{n-1}T^{n-1} + \cdots + \alpha_0 I$的谱$\sigma(P(T))$由在$T$的谱$\sigma(T)$中取值的多项式$P$的所有值组成。

**证** 由定理2.6（Ⅰ）知$\sigma(T)\neq\phi$。若$n = 0$时，结论成立。此时，$P(\sigma(T)) = \{\alpha_0\} = \sigma(P(T))$。当$n>0$时，我们首先证明

（Ⅰ）$\sigma(P(T))\subset P(\sigma(T))$

简记$S = P(T)$，$S_\mu = P(T) - \mu I$ （$\mu\in C$）。因此，如果$S_\mu^{-1}$存在，则$S_\mu^{-1}$必是算子$P(T)$的预解算子。保持$\mu$固定，因为X是复

的，多项式$S_\mu(\lambda)=P(\lambda)-\mu$必可分解成$n$个线性项之积

$$S_\mu(\lambda)=P(\lambda)-\mu=a_n(\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2)\cdots(\lambda-\beta_n) \qquad (5)$$

其中$\beta_1,\cdots,\beta_n$是$S_\mu$的零点（当然，依赖于$\mu$值），与(5)式相对应，有

$$S_\mu=P(T)-\mu I=a_n(T-\beta_1 I)(T-\beta_2 I)\cdots(T-\beta_n I)$$

若有$\beta_i\in\rho(T)(i=1, 2, \cdots n)$，则每一个$T-\beta_i I$都有有界逆，由引理1.3，均在全空间$X$有定义，因此$S_\mu$亦具有这些性质，则

$$S_\mu^{-1}=\frac{1}{a_n}(T-\beta_n I)^{-1}(T-\beta_{n-1}I)^{-1}\cdots(T-\beta_1 I)^{-1}$$

此时，$\mu\in\rho(P(T)$。据此可以断言，由$\mu\in\sigma(P(T))$，必推得对某个$i$，$\beta_i\in\sigma(T)$。因为$\mu\in\sigma(P(T))$，则$\mu\notin\rho(P(T))$，则由前证，至少有某个$i$，使得$S_\mu^{-1}$不存在且$(T-\beta_i I)^{-1}$不存在，故$\beta_i\in\sigma(T)$。现在，(5)式给出

$$S_{(i=1,2,\cdots,n)}(\beta_i)=P(\beta_i)-\mu=0$$

所以

$$\mu=P(\beta_i)\in P(\sigma(T))$$

又由$\mu\in\sigma(P(T))$的任意性，(Ⅰ)得证。

(Ⅱ) 下证$P(\sigma(T))\subset\sigma(P(T))$，这只需证明：

$$a\in P(\sigma(T))，推得，a\in\sigma(P(T)) \qquad (6)$$

假设$a\in P(\sigma(T))$，由定义，对于某$\beta\in\sigma(T)$，有$a=P(\beta)$。此时，有两种情形：$T-\beta I$无逆和$T-\beta I$有逆。

(A) $T-\beta I$无逆。因为$a=P(\beta)$，则有$P(\beta)-a=0$，因此，$\beta$是多项式

$$S_a(\lambda)=P(\lambda)-a$$

的零点。显然，可以改写成

$$S_\alpha(\lambda) = P(\lambda) - \alpha = (\lambda - \beta)g(\lambda)$$

其中$g(\lambda)$表示$\alpha_n$与另外$n-1$个关于$\lambda$的线性因子的乘积。于是，相应的算子为

$$S_\alpha = P(T) - \alpha I = (T - \beta I)g(T) \tag{7}$$

由于$g(T)$的所有的因子都与$T - \beta I$可交换，因此有

$$S_\alpha = g(T)(T - \beta I) \tag{8}$$

如果$S_\alpha$有逆，则(7)式和(8)式推得

$$I = (T - \beta I)g(T)S_\alpha^{-1} = S_\alpha^{-1}g(T)(T - \beta I)$$

说明$T - \beta I$亦有逆，与假设矛盾。所以,对于这个$\alpha$,$P(T)$的预解式$S_\alpha^{-1}$不存在。于是$\alpha \in \sigma(P(T))$,又由$\alpha$选取的任意性，(6)式成立。

(B) $T - \beta I$有逆。假设对于$\beta \in \sigma(T)$,有$\alpha = P(\beta)$并且$(T - \beta I)^{-1}$存在，则必有值域

$$\mathscr{R}(T - \beta I) \neq X \tag{9}$$

因为对算子$T - \beta I$使用第三章有界逆定理11.7,推得$(T - \beta I)^{-1}$有界,于是$\beta \in \rho(T)$,与$\beta \in \sigma(T)$的假设矛盾。又从(7)式和(9)式，推得

$$\mathscr{R}(S_\alpha) \neq X \tag{10}$$

这说明$\alpha \in \sigma(P(T))$，因为应用引理1.3(Ⅱ)于$P(T)$，由$\alpha \in \rho(P(T))$蕴含着$\mathscr{R}(S_\alpha) = X$，与(10)式相悖。再由$\alpha$的任意性，(6)式成立。

**3.3 定理** 在线性空间$X$中，线性算子$T$的不同特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$对应的特征向量$x_1, \cdots, x_n$组成线性无关集。

**证** 假设结论不成立，$\{x_1, \cdots, x_n\}$线性相关。令$x_m$是可以表成前面向量线性组合的第一个向量，即

$$x_m = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{m-1}x_{m-1} \tag{11}$$

并且$\{x_1,\cdots,x_{m-1}\}$线性无关。用算子$T-\lambda_m I$作用(11)式两边，得到

$$(T-\lambda_m I)x_m=\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i(T-\lambda_m I)x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i(\lambda_i-\lambda_m)x_i$$

由于$x_m$是对应于$\lambda_m$的特征向量，上式左端必为零，然而，右端的向量组成线性无关集，必有

$$\alpha_i(\lambda_i-\lambda_m)=0,\ \text{但}\lambda_i-\lambda_m\neq 0\quad (i=1,2,\cdots,m-1)$$

所以$\alpha_i=0(i=1,2,\cdots m-1)$，代入(11)式，$x_m=0$矛盾

## 习　　题

1. 假设$S$，$T\in B(X, X)$，任意$\lambda\in\rho(S)\cap\rho(T)$，证明：
$R_\lambda(S)-R_\lambda(T)=R_\lambda(S)(T-S)R_\lambda(T)$

2. 设X是复Banach空间，$T\in B(X, X)$，$P$是一个多项式，证明，对于每一个$y\in Y$，方程$P(T)x=y$ $(x, y\in X)$有唯一解$x$当且仅当对于所有$\lambda\in\sigma(T)$，$P(\lambda)\neq 0$。

3. 证明：定理3.2中，X是复空间的条件必不可少。

4. 证明，对于复Banach空间X中的任意算子$T\in B(X,X)$，总有
$r_\sigma(\alpha T)=|\alpha|r_\sigma(T)$，　$r_\sigma(T^k)=[r_\sigma(T)]^k$　$(k\in N)$
这里$r_\sigma$表谱半径。

5. Banach空间中的有界线性算子T称为是幂等的，如果$T^2=T$。证明：如果$T\neq 0$，$T\neq I$，则它的谱为$\sigma(T)=\{0, 1\}$。

6. 证明：矩阵

$$T_B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

表示幂等算子T：$R^3\to R^3$，这里$B$是$R^3$中的一组正交规范基。直接计算它的谱$\sigma(T)$，特征向量和特征空间。

## §4 有界自伴线性算子的谱性质

Hilbert空间中的有界自伴线性算子有着极为广泛的实际应用。例如，具有对称核的线性积分方程理论，与二次型有关的一系列问题等等，而这类算子的特征值问题即谱理论更占有重要位置。这里，我们仅作简单的介绍。

大家知道，有界自伴线性算子$T$可以没有特征值（参看本节习题3），但是，如果$T$有特征值，则有下述定理。

**4.1 定理** 设$H$是复Hilbert空间，$T: H\to H$是有界自伴线性算子，则

（Ⅰ）$T$的所有特征值是实的；

（Ⅱ）对应于$T$的不同特征值的特征向量是彼此正交的。

**证** （Ⅰ）设$\lambda$是$T$的任意特征值，$x$是相应的特征向量，则$x\neq 0$，$Tx=\lambda x$，利用算子$T$的自伴性，得到

$$\lambda\langle x, x\rangle=\langle\lambda x, x\rangle=\langle Tx, x\rangle$$

$$=\langle x, Tx\rangle=\langle x, \lambda x\rangle=\overline{\lambda}\langle x, x\rangle$$

因为$\langle x, x\rangle=\|x\|^2\neq 0$，推得$\lambda=\overline{\lambda}$，因此$\lambda$是实数。

（Ⅱ）设$\lambda$和$\mu$都是$T$的特征值，$x$和$y$是相应的特征向量，则$Tx=\lambda x$，$Ty=\mu y$，因为$T$自伴，由（Ⅰ），$\mu$亦实数。

$$\lambda\langle x, y\rangle=\langle\lambda x, y\rangle=\langle Tx, y\rangle$$

$$=\langle x, Ty\rangle=\langle x, \mu y\rangle=\mu\langle x, y\rangle$$

但是，$\lambda\neq\mu$，必有$\langle x, y\rangle=0$。

我们还可以进一步得到有界自伴线性算子$T$的所有谱值都是实的。为此，先讨论$T$的预解集$\rho(T)$的特征。

**4.2 定理** 设$H$是复Hilbert空间，$T$：$H\to H$是有界自伴线性算子，数$\lambda\in\rho(T)$当且仅当存在着数$a>0$,使得对于每一个$x\in H$，成立着

$$\|T_\lambda x\|\geqslant a\|x\| \tag{1}$$

**证** 如果$\lambda\in\rho(T)$，则$R_\lambda=T_\lambda^{-1}$：$H\to H$存在且有界,因为$R_\lambda\neq 0$，可记$\|R_\lambda\|=k,k>0$,由$I=R_\lambda T_\lambda$,于是对于每一个$x\in H$，有

$$\|x\|=\|R_\lambda T_\lambda x\|\leqslant\|R_\lambda\|\|T_\lambda x\|=k\|T_\lambda x\|$$

这就推得$\|T_\lambda x\|\geqslant a\|x\|$，这里$a=1/k$。

反之，假设(1)式成立。我们来证明：

(A) $T_\lambda$：$H\to T_\lambda(H)$是双射；

(B) $\overline{T_\lambda(H)}=H$；

(C) $T_\lambda(H)$是$H$中的闭集。

于是，由第三章有界逆定理11.7，$T_\lambda(H)=H$,并且$R_\lambda=T_\lambda^{-1}$有界。

(A) 我们必须证明$T_\lambda x_1=T_\lambda x_2$蕴含$x_1=x_2$，因为$T_\lambda$线性，又由(1)式，推得

$$0=\|T_\lambda x_1-T_\lambda x_2\|=\|T_\lambda(x_1-x_2)\|\geqslant a\|x_1-x_2\|$$

$a>0$，因此$\|x_1-x_2\|=0$，故$x_1=x_2$，又由$x_1$，$x_2$的任意性，$T_\lambda$：$H\longrightarrow T_\lambda(H)$是双射。

(B) 设$x_0\perp\overline{T_\lambda(H)}$，则$x_0\perp T_\lambda(H)$。因此，对于所有的$x\in H$，有

$$0=\langle T_\lambda x,\ x_0\rangle=\langle Tx,\ x_0\rangle-\lambda\langle x,\ x_0\rangle$$

$T$是自伴算子，故有

$$\langle x, Tx_0\rangle = \langle Tx, x_0\rangle = \langle x, \bar{\lambda} x_0\rangle$$

于是 $Tx_0 = \bar{\lambda} x_0$。此时$x_0 \neq 0$是不可能的，因为这意味着$\bar{\lambda}$是$T$的特征值，由定理4.1，$\bar{\lambda} = \lambda$，并且 $Tx_0 - \lambda x_0 = T_\lambda x_0 = 0$，由(1)，得到矛盾：

$$0 = \|T_\lambda x_0\| \geqslant \alpha \|x_0\| > 0$$

这里，$\alpha > 0$，所以，必有$x_0 = 0$。因为$x_0$是任意正交于$T_\lambda(H)$的向量，于是$\overline{T_\lambda(H)}^{\perp} = \{0\}$。由第四章定理2.9，蕴含$\overline{T_\lambda(H)} = H$，即$T_\lambda(H)$在$H$中稠。

(*C*) 设 $y \in \overline{T_\lambda(H)}$，则由第二章定理4.5(*I*)，存在着序列$\{y_n\} \in T_\lambda(H)$，$y_n \longrightarrow y$，因为$y_n \in T_\lambda(H)$，则有$x_n \in H$，$y_n = T_\lambda x_n$，由(1)式，

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|T_\lambda(x_n - x_m)\| = \frac{1}{\alpha}\|y_n - y_m\|$$

因此，$\{x_n\}$是Cauchy序列，又由$H$的完备性，$\{x_n\}$收敛，$x_n \longrightarrow x$，但是，$T$是连续的，$T_\lambda$亦然，于是$y_n = T_\lambda x_n \longrightarrow T_\lambda x$。由定义，$T_\lambda x \in T_\lambda(H)$。再由极限的唯一性，$T_\lambda x = y$，于是$y \in T_\lambda(H)$，因此$\overline{T_\lambda(H)} \subset T_\lambda(H)$，故$T_\lambda(H)$是闭集。由(*B*)，推出$T_\lambda(H) = H$，这意味着$R_\lambda \doteq T_\lambda^{-1}$定义在全空间$H$上。使用第三章有界逆定理11.7，或直接从(1)式，蕴含着$R_\lambda = T_\lambda^{-1}$是有界的，所以，$\lambda \in \rho(T)$。

**4.3 定理** 设$H$是复Hilbert空间，$T: H \to H$是有界自伴线性算子，则谱集$\sigma(T)$是实的。

**证** 利用定理4.2，如果我们能证明任何的$\lambda=\xi+i\eta$（$\xi$，$\eta$是实数），且$\eta\neq 0$，都有$\lambda\in\rho(T)$则结论$\sigma(T)\subset R$成立。

对于每一个$0\neq x\in H$，有

$$\langle T_\lambda x,\ x\rangle=\langle Tx,\ x\rangle-\lambda\langle x,\ x\rangle$$

因为$\langle x,\ x\rangle$和$\langle Tx,\ x\rangle$都是实的，于是

$$\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle}=\langle Tx,\ x\rangle-\overline{\lambda}\langle x,\ x\rangle$$

这里，$\overline{\lambda}=\xi-i\eta$，将上两式相减，

$$\langle T_\lambda x,x\rangle-\langle T_\lambda x,x\rangle=(\lambda-\overline{\lambda})\langle x,\ x\rangle=2i\eta\|x\|^2$$

上式左端应是$-2iIm\langle T_\lambda x,\ x\rangle$，代入有

$$-2iIm\langle T_\lambda x,\ x\rangle=2i\eta\|x\|^2$$

消去公因式，取绝对值再用Schwarz不等式，推得

$$|\eta|\,\|x\|^2=|Im\langle T_\lambda x,\ x\rangle|\leqslant|\langle T_\lambda x,x\rangle|$$
$$\leqslant\|T_\lambda x\|\,\|x\|$$

用$\|x\|\neq 0$去除上式两端，蕴含着

$$|\eta|\,\|x\|\leqslant\|T_\lambda x\|$$

如果$\eta\neq 0$，由定理4.2，得到$\lambda\in\rho(T)$。因此，当$\lambda\in\sigma(T)$时，必须$\eta=0$，则$\lambda\in R$。

通过前面的讨论知道：有界线性算子的谱集必是复平面$C$中的紧集，因而有界。而有界自伴线性算子的谱集必然分布在实轴上，不仅如此，还有下述定理。

**4.4 定理** 设$T$：$H\longrightarrow H$是复Hilbert空间中的有界自伴线性算子，则谱集$\sigma(T)\subset[m,\ M]\subset R$，这里

$$m=\inf_{\|x\|=1}\langle Tx,\ x\rangle,\quad M=\sup_{\|x\|=1}\langle Tx,\ x\rangle。\quad(2)$$

**证** 由定理4.3，有$\sigma(T)\subset R$，现在，只需证明任何实数$\lambda=M+c$（或$m-c$）其中$c>0$都是$T$的正则值即可。

对于每一个$x \neq 0$和$u=\|x\|^{-1}x$，则$x=\|x\|u$，于是

$$\langle Tx,x\rangle=\|x\|^2\langle Tu,u\rangle\leqslant\|x\|^2\sup_{\|v\|=1}\langle Tv,v\rangle$$

$$=\langle x,x\rangle M$$

因此，$-\langle Tx,x\rangle\geqslant-\langle x,x\rangle M$，由Schwarz不等式，蕴含着

$$\|T_\lambda x\|\|x\|\geqslant-\langle T_\lambda x,x\rangle=-\langle Tx,x\rangle+\lambda\langle x,x\rangle$$

$$\geqslant(-M+\lambda)\langle x,x\rangle=c\|x\|^2$$

由假设，这里$c=\lambda-M>0$，两端除以$\|x\|\neq 0$，又使用定理4.2，蕴含$\lambda\in\rho(T)$。当$\lambda=m-c<m$时，可以进行类似的证明。

**4.5 定理** 设$H$和$T$均与定理4.4同，$H\neq\{0\}$，则由(2)式定义的$m$和$M$是$T$的谱值。

**证** 首先证明$M\in\sigma(T)$。由谱映射定理3.2，算子$T+kI$（$k$是实常数）的谱可以从$T$的谱得出，并且

$$M\in\sigma(T)\Longleftrightarrow M+k\in\sigma(T+kI)$$

不失一般性，我们可以假设$0\leqslant m\leqslant M$。由第四章定理8.7，有

$$M=\sup_{\|x\|=1}\langle Tx,x\rangle=\|T\|$$

由上确界的定义，存在着序列$\{x_n\}$使得

$$\|x_n\|=1,\ \langle Tx_n,x_n\rangle=M-\delta_n,\ \delta_n\geqslant 0,\ \delta_n\longrightarrow 0。$$

则$\|Tx_n\|\leqslant\|T\|\|x_n\|=\|T\|=M$。但是，$T$是自伴算子，于是

$$\|Tx_n-Mx_n\|^2=\langle Tx_n-Mx_n,\ Tx_n-Mx_n\rangle$$

$$=\|Tx_n\|^2-2M\langle Tx_n,x_n\rangle+M^2\|x_n\|^2$$

$$\leqslant M^2-2M(M-\delta_n)+M^2$$

$$=2M\delta_n\longrightarrow 0$$

因此，不存在正数$a$，使得

$$\|T_M x_n\| = \|Tx_n - Mx_n\| \geqslant a = a\|x_n\| \qquad (\|x_n\| = 1)$$

由定理4.2说明$\lambda = M$不可能是$T$的正则值，所以，$M \in \sigma(T)$。

至于$\lambda = m$的情形，可进行类似证明。

从线性代数中，大家知道，有限维空间中线性算子只有点谱，连续谱和剩余谱都是空集$\phi$。但在无限维空间中，情况要复杂得多。不过，复Hilbert空间中的有界自伴线性算子，其剩余谱是空集。

**4.6 定理** 复Hilbert空间$H$中的有界自伴线性算子$T$：$H \to H$，其剩余谱$\sigma_r(T) = \phi$。

**证** 假设结论不成立，$\sigma_r(T) \neq \phi$。令$\lambda \in \sigma_r(T)$，由定义，$T_\lambda$的逆$R_\lambda$存在，但其定义域$\mathscr{D}(T_\lambda^{-1})$不在$H$中稠。所以，由第四章投影定理2.9，存在着$0 \neq y \in H$，且$y \perp \mathscr{D}(T_\lambda^{-1})$，但是，$\mathscr{D}(T_\lambda^{-1})$是算子$T_\lambda$的值域，因此，对于所有的$x \in H$，有

$$\langle T_\lambda x,\ y\rangle = 0$$

由于$\lambda$是实数，$T$是自伴算子，于是，得到$\langle x,\ T_\lambda y\rangle = 0$对所有的$x \in H$成立。特别，取$x = T_\lambda y$，推得$\|T_\lambda y\|^2 = 0$，于是

$$T_\lambda y = Ty - \lambda y = 0$$

因为$y \neq 0$，这说明$\lambda$是$T$的特征值，而这与$\lambda \in \sigma_r(T)$矛盾。所以，$\sigma_r(T) \neq \phi$是不可能的，$\sigma_r(T) = \phi$。

## 习 题

1. 设$T$：$l^2 \to l^2$定义成$y = (\eta_i) = Tx$，$x = (\xi_i)$，$\eta_i = \lambda_i \xi_i$，其中$\{\lambda_i\}$是$R$中的有界序列，$a = \inf\limits_i \lambda_i$，$b = \sup\limits_i \lambda_i$，证明：$\lambda_i$是$T$的特征值。在什么条件下有$\sigma(T) \supset [a,\ b]$。

2. 利用定理4.2证明上题中算子$T$的谱集是$T$的特征值集的闭

包。

3. 证明：$T$：$L^2[0, 1]\to L^2[0,1]$定义成$y(t)=Tx(t)=tx(t)$，是有界自伴线性算子，但无特征值。

4. 证明：定理4.5中，$m\in\sigma(T)$。

5. 证明(2)式可以写成

$$\sigma(T)\subset\left[\inf_{x\neq 0}\frac{\langle Tx, x\rangle}{\langle x, x\rangle}, \sup_{x\neq 0}\frac{\langle Tx, x\rangle}{\langle x, x\rangle}\right]$$

6. 证明：具有正元的实对称方阵$A=(a_{ik})$有正特征值。

# 第七章　Banach空间微分学初步

人们早就期望把微积分学中的基本概念和方法推广到无限空间中去。正如大家所看到的，函数推广成一般的映射和算子；连续函数推广成一般的连续映射或连续算子。显然，把导数、微分的概念推广到抽象空间中去，更有重要意义，其实，这是非线性泛函分析的基础。

弱微分的概念首先由R.Gâteaux于1922年提出。它是数学分析中方向导数概念和变分法中弱变分概念的推广，其特点是所要求的条件较少，例如不必要求映射连续，甚至不必要求空间是赋范空间。因此，适用范围很广。特别，对于泛函使用起来十分方便。

强微分的概念首先为法国数学家M.Fréchet于1925年建立起来，它是数学分析中全微分概念和变分法中强变分概念的推广，是应用最多的一种微分概念。由于它定义成映射的线性主部，正好反映了非线性问题线性化的思想。

## §1　Gâteaux微分

在微积分中，若$f$：$R^3\to R$是一个三元函数，通常记为$u=f(x,y,z)$，如果极限

$$\lim_{\rho\to 0+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta,z_0+\rho\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$$

存在，则称该极限为$f$在点$(x_0,\ y_0,\ z_0)\in R^3$处，沿方向$\vec{l}=$

$\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$的方向导数，记为$D_l f(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$\frac{\partial f}{\partial l}$等等。

推广这个概念到Banach空间中，有下述定义。

**1.1 定义** 设$X$，$Y$是同域上的Banach空间，已知映射为$f$(*)：$X\to Y$，给定$x_0$，$\eta\in X$，若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\eta)-f(x_0)}{t}$$

存在，则称$f$在点$x_0$沿$\eta$方向是**Gâteaux可微**的，记此极限为$D(x_0;\ \eta)$，叫作$f$的**Gâteaux微分**简称**弱微分**。

$$D_+f(x_0;\ \eta)=\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_0+t\eta)-f(x_0)}{t}\text{ 叫右弱微分.}$$

$$D_-f(x_0;\ \eta)=\lim_{t\to 0-}\frac{f(x_0+t\eta)-f(x_0)}{t}\text{ 叫左弱微分.}$$

仅当$D_+f(x_0;\ \eta)=D_-f(x_0;\ \eta)$时，才有$f$在$x_0$处沿$\eta$方向的弱微分。

特别，当$Y=R$时，即$f$：$X\to R$是泛函(未必线性)时，Gâteaux弱微分$Df(x_0;\ \eta)$又叫作$f$在点$x_0$对$\eta$的弱变分。

其实，定义1.1中的(1)式等价于

$$\lim_{t\to 0}\|f(x_0+t\eta)-f(x_0)-tDf(x_0;\ \eta)\|_Y=0 \qquad (2)$$

如果映射f在点$x_0\in X$沿每个方向都是弱可微的，即弱微分$Df(x_0;\ \eta)$不因$\eta$而改变，则称$f$在点$x_0$**弱可微**，或Gâteaux

---

(*) 本章采用有关文献和其它教科书中通常的作法：不再严格区分映射与泛函的记号，尤其是非线性映射和非线性泛函的记号，一般都使用英文小写字母$f$，$g$，…。

可微。

对于任意标量$\alpha \neq 0$，有

$$Df(x_0; \alpha\eta) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t(\alpha\eta)) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\alpha[f(x_0 + (\alpha t)\eta) - f(x_0)]}{\alpha t}$$

$$= \alpha Df(x_0, \eta)$$

因此，弱微分关于$\eta$是齐性的。

如果，弱微分关于$\eta$还是可加的，亦即

$$Df(x_0; \eta_1 + \eta_2) = Df(x_0; \eta_1) + Df(x_0; \eta_2)$$

则必有

$$Df(x_0; \eta) = [Df(x_0)]\eta$$

其中 $Df(x_0) \in L(X, Y)$，$L(X, Y) = \{T|_{T: X\to Y 线性}\}$。这时，$Df(x_0; \eta)$称为线性弱微分；线性算子$Df(x_0)$ 称 为$f$在$x_0$处的弱导算子。如果$Df(x_0)$存在且属于$L(X, Y)$，则称$Df(x_0; h)$为$f$在$x_0$的有界线性弱微分。

**1.2 定义** 如果$f: \Omega \to Y$，其中$\Omega \in Y$，$X$和$Y$都是Banach空间，在$\Omega$内每一点都有线性弱微分，则$Df(x)$是 映$x \in \Omega$到$L(X, Y)$中的映射，称其为$f$的**弱导映射**（或弱导 算子）。

区分上述情形是必要的。

**1.3 例** 泛函$\varphi(x) = \|x\|$，考虑$x_0 = 0$，因为

$$D_+\varphi(x_0, \eta) = D_+\varphi(0, \eta) = \lim_{t\to 0+} \frac{\varphi(0 + t\eta) - \varphi(0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{\|t\eta\|}{t} = \|\eta\|$$

但是

$$D_-\varphi(x_0, \ \eta) = D_-\varphi(0, \ \eta) = \lim_{t \to 0-} \frac{\varphi(0+t\eta) - \varphi(0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0-} \frac{\|t\eta\|}{t} = -\|\eta\|$$

当$\eta \neq 0$时，$D_+(0, \ \eta) \neq D_-\varphi(0, \ \eta)$，泛函$\varphi(x)$ 在 点$x_0 = 0$处非Gâteaux可微。

**1.4 例** 考虑二维空间的函数$f$：$R^2 \to R$；

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\xi_1^2 \xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}, & \text{当} x = (\xi_1, \ \xi_2) \neq (0, \ 0)\text{时；} \\ 0 & \text{，当} x = (\xi_1, \ \xi_2) = (0, \ 0)\text{时。} \end{cases}$$

则$f$在$x_0 = (0, \ 0)$处弱微分存在。因为，对于$\eta = (\eta_1, \ \eta_2)$，有

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0+t\eta) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{(t\eta_1)^2 (t\eta_2)}{(t\eta_1)^2 + (t\eta_2)^2} - 0}{t}$$

$$= \frac{\eta_1^2 \eta_2}{\eta_1^2 + \eta_2^2} = Df(0; \ \eta)$$

对于任意$a \neq 0$，

$$Df(0; \ a\eta) = \frac{(a\eta_1)^2 (a\eta_2)}{(a\eta_1)^2 + (a\eta_2)^2} = a \frac{\eta_1^2 \eta_2}{\eta_1^2 + \eta_2^2} = aDf(0; \ \eta)$$

说明，在$x_0 = (0, \ 0)$处，$f$的弱微分是 齐 性 的。但是，对于任意$\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$，$\hat{\eta} = (\hat{\eta}_1, \ \hat{\eta}_2)$，

$$Df(0;\ \tilde{\eta}+\hat{\eta})=\frac{(\tilde{\eta}_1+\hat{\eta}_1)^2(\tilde{\eta}_2+\hat{\eta}_2)}{(\tilde{\eta}_1+\hat{\eta}_1)^2+(\tilde{\eta}_2+\hat{\eta}_2)^2}$$

$$\neq\frac{\tilde{\eta}_1^2\tilde{\eta}_2}{\tilde{\eta}_1^2+\tilde{\eta}_2^2}+\frac{\hat{\eta}_1^2\hat{\eta}_2}{\hat{\eta}_1^2+\hat{\eta}_2^2}$$

$$=Df(0;\ \tilde{\eta})+Df(0;\ \hat{\eta})$$

所以，$Df(0;\ \eta)$不是线性弱微分。

**1.5　例**　设映射$f;R^n\longrightarrow R$，取$R^n$的基为$E=\{e_1,\cdots,e_n\}$，其中$e_i=(0,\cdots,0,\ 1,\ 0,\ 0)^T=(\delta_{Ki})^T$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,n)$，则

$$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$$

因此

$$Df(x;e_i)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+te_i)-f(x)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\begin{array}{c}f(\xi_1,\cdots,\xi_{i-1},\xi_i+t,\xi_{i+1},\cdots,\xi_n)\\-f(\xi_1,\cdots,\xi_{i-1},\xi_i,\xi_{i+1},\cdots,\xi_n)\end{array}}{t}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial\xi_i}\qquad(i=1,2,\cdots\eta)$$

在此特例中，Gâteaux弱微分即偏导数，这符合方向导数的意义：偏导数就是沿各坐标轴(基)方向的方向导数。这说明，Gâteaux微分是方向导数概念的推广。

**1.6　例**　设映射$f$：$R^2\rightarrow R$，定义成

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\xi_1\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2}, & 当x=(\xi_1,\ \xi_2)\neq(0,\ 0)时；\\ 0, & 当x=(\xi_1,\ \xi_2)=(0,\ 0)时。\end{cases}$$

对于任意的$\eta=(\eta_1, \eta_2)$，有

$$Df(0, \eta)=\lim_{t\to 0}\frac{\eta_1\eta_2}{t(\eta_1^2+\eta_2^2)}$$

极限仅当$\eta=(\eta_1, 0)$或$\eta=(0, \eta_2)$才存在，且为零。但由例1.5知，偏导数是存在的。说明偏导数存在仍不能保证Gâteaux弱微分存在，这一点与微积分不同。

注意：当$X$，$Y$是同域上的线性空间时，定义1.1仍成立。

## §2 Fréchet微分

大家知道，一元函数微分学中，一阶导数定义成

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

而一阶微分定义成增量的线性主部：

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+0(h)=ah+0(h)\quad (h\to 0)$$

现在，把它们推广到无限维空间中，例如赋范空间中，就得到Fréchet微分，即强微分的概念，这也是应用最多的微分概念。

**2.1 定义** 设$X$和$Y$都是实赋范空间，$\Omega\in X$是开集，$f: \Omega\to Y$称为在点$x_0\in\Omega$是**强可微的**，或**Fréchet意义下可微的**，如果存在着有界线性算子$A\in B(X,Y)$，使得$h\in X$，$x_0+h\in X$时，

$$f(x_0+h)-f(x_0)-Ah=\omega(x_0, h)\qquad (1)$$

这里，$\omega(x_0, h)=0(\|h\|)$，亦即

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}=0\qquad (2)$$

此时，$df(x_0,h)=Ah$称为$f$在$x_0$处的强微分，记为$df(x_0)=A$，称为$f$在$x_0$处的**导算子**。有时按习惯，亦记为$df(x_0)=f'(x_0)$。

**2.2 定义** 如果$f$在$\Omega\in X$内每一点都可微，则$df(x)=f'(x)$是映$x\in\Omega$到$B(X, Y)$的映射，称为$f$的**导映射**（或导算子）。

注意：尽管$f$只定义在$\Omega\in X$上，但$f'(x_0)$却是定义在整个空间$X$上的有界线性算子。另外，即使$f(x)$与$f'(x)$都定义在$\Omega$上，它们的值域却属于完全不同的空间。

由上述定义，可推得一些简单性质。

**2.3 简单性质**

（Ⅰ）**求导运算是线性运算**。亦即，如果$f_1, f_2$：$\Omega\to Y$，均在$x\in\Omega$可微，$\alpha$，$\beta$是任意常数，则

$$d[\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)]=\alpha df_1(x)+\beta df_2(x)$$

这里，$\Omega\in X$。

因为对于所有的$h\in X$，若有$df_1(x; h)=A_1h, df_2(x; h)=A_2h$，$A_1$，$A_2\in B(X, Y)$，则

$$d[\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)]=d[\alpha f_1+\beta f_2](x)=(\alpha A_1+\beta A_2)h$$
$$=\alpha A_1h+\beta A_2h=\alpha df_1(x)+\beta df_2(x)$$

（Ⅱ）**常映射的导映射是$O$**。亦即，对于任意的$x\in X$，都有$f(x)=y_0\in Y$，则对于任何$x\in X$，都有$df(x)=O$。

因为，对于所有的$h\in X$，若有$A\in B(X, Y)$，使得

$$f(x+h)-f(x)-Ah=y_0-y_0-Ah=\omega(x, h)$$

则

$$\omega(x, h)=-Ah$$

于是，由

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(x, h)\|}{\|h\|}=\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|-Ah\|}{\|h\|}=0$$

对于一切$\|h\|\to 0$成立，必有$A=O$。

（Ⅲ）**有界线性算子的导映射就是它本身。**

注意：前面的讨论与微积分中的情形极为相似，所不同者，在于现在的空间$X$中没有坐标，因而没有偏导数的概念。

（Ⅳ）设$X$，$Y$，$Z$都是实赋范空间，映射$g$：$X\to Y$在$x\in X$处强可微，$f$：$Y\longrightarrow Z$在$y=g(x)$强可微，则复合映射$f\cdot g$：$X\to Z$，（对于任意$x\in X$，$(f\cdot g)(x)=f(g(x))$），在$x$处可微，且

$$d(f\cdot g)(x)=[df(y)]\cdot[dg(x)]$$

见图7-1。

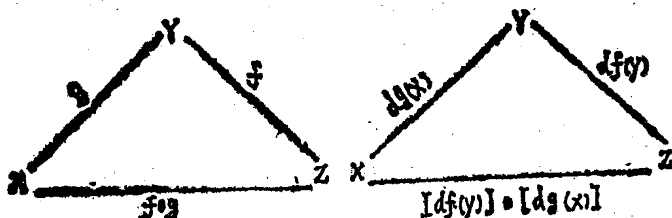



图7-1

**证** 由定义2.1，对于任意的$h\in X$和$k\in Y$，

$$g(x+h)-g(x)-[dg(x)]h=\omega(x,\ h)=0(\|h\|)$$

$$f(y+k)-f(y)-[df(y)]k=\theta(y,\ k)=0(\|k\|)$$

特别取$k=[dg(x)]h+\omega(x,h)$，因为$dg(x)$是有界线性算子，当$\|h\|\to 0$时，推得$\|k\|\to 0$；另一方面，又因为$df(y)$是有界线性算子，于是

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x+h)&=f(g(x+h))\\&=f(g(x)+[dg(x)]h+\omega(x,\ h))\\&=f(y+k)\end{aligned}$$

$$= f(y) + [df(y)]k + \theta(y, k)$$

$$= (f \circ g)(x) + [df(y)] \circ [dg(x)]h$$

$$+ [df(y)]\omega(x, h) + \theta(y, k)$$

显然，$\omega(x,h) = 0(\|h\|)$，且$\|h\| \to 0$时，$\|k\| \to 0$，$\theta(y, k) = 0(\|k\|)$，所以，$[df(y)]\omega(x, h) + \theta(y, k) = 0(\|h\|)$，这说明复合映射$f \circ g$在$x$处可微，其微分就是$[df(y)]0[dg(x)]h$。

下面，讨论两种可微性以及映射连续性之间的关系。

**2.4 定理** 映射$f$：$\Omega \longrightarrow Y$ 在$x_0 \in \Omega$ 是 Fréchet 可微的充要条件是$f$在$x_0$处连续，并且存线性算子$A \in L(X, Y)$满足(1)式和(2)式。

**证** 必要性。如果$f$在$x_0$处可微，由定义，必有算子$A \in L(X, Y)$，使得(1)，(2)式成立，因此只需证明$f$在$x_0$处连续即可。

由(2)式和$df(x_0)$的有界性，有

$$\|f(x_0+h) - f(x_0)\| \leqslant \|df(x_0)\| \cdot \|h\| + \|\omega(x_0,h)\|$$

使用(2)式，得到

$$\lim_{\|h\| \to 0} \|f(x_0+h) - f(x_0)\| = 0$$

由$h$的任意性，所以$f$在$x_0$处连续。

充分性。如果$f$在$x_0$连续，并且存在线性算子$A \in L(X, Y)$合于(1)，(2)式，只需证明$A$有界即可。

由连续性和(2)式，必有$\alpha > 0$，使得$\|h\| \leqslant \alpha$，不失一般性。假设$\alpha \leqslant 1$，则

$$\|f(x_0+h) - f(x_0)\| \leqslant 1, \quad \|\omega(x_0, h)\| \leqslant 1$$

于是，使用(1)式，得到

$$\|Ah\| \leqslant \|f(x_0+h) - f(x_0)\| + \|\omega(x_0, h)\| \leqslant 2$$

所以

$$\|A\| = \sup_{\|h\|=1} \|Ah\| \leqslant \frac{2}{\alpha}$$

**2.5 定理** $f$在$x_0 \in \Omega$强可微的充要条件是$f$在$x_0$处存在有界线性弱微分，并且极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[ f(x_0 + th) - f(x_0) \right] = \left[ Df(x_0) \right] h$$

关于$\|h\| = 1$是一致的。

**证** 必要性。任给$\varepsilon > 0$，由(2)式，存在$\delta > 0$，当$\|h_1\| < \delta$时，有

$$\|\omega(x_0, h_1)\| < \varepsilon \|h_1\|$$

对于$\|h\| = 1$，取$|t| < \delta$，利用(1)式得到

$$\left\| \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} - \left[ df(x_0) \right] h \right\|$$

$$\leqslant \frac{\|\omega(x_0, th)\|}{|t|} = \frac{\|\omega(x_0, th)\|}{\|th\|} < \varepsilon$$

因为$\delta$与$h$无关，所以$[f(x_0 + th) - f(x_0)]/t$的一致极限为$[df(x_0)]h$。由上节定义1.1，$df(x_0)h = Df(x_0, h)$亦是$f$在$x_0$的有界线性弱微分。

充分性。任给$\varepsilon > 0$，依假设，存在与$\|h\| = 1$无关的$\delta > 0$，使得当$|t| < \delta$时，有

$$\left\| \frac{1}{t}\left[ f(x_0 + th) - f(x_0) \right] - [Df(x_0)] h \right\| < \varepsilon$$

记$h_1 = th$，当$\|h_1\| < \delta$时，就有

$$\|f(x_0 + h_1) - f(x_0) - [Df(x_0)] h_1\| < |t| \varepsilon = \varepsilon \|h_1\|$$

因为$Df(x_0)$是有界线性算子，由(1)，(2)式知$df(x_0)$存在且

等于$Df(x_0)$。

**2.6 推论** 假设有界线性弱导映射$Df(x)$在$x_0\in\Omega$处连续，则$f$在$x_0$处强可微。

（证明从略）

**2.7 例** 设$f: R^2\to R$，对于$x=(\xi_1, \xi_2)$，定义$f(x)=\xi_1\xi_2+\xi_1^2$，又设$h=(h_1, h_2)^T$，于是

$$
\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= (\xi_1+h_1)(\xi_2+h_2)+(\xi_1+h_1)^2 \\
&\quad -(\xi_1\xi_2+\xi_1^2) \\
&= \xi_2 h_1+\xi_1 h_2+2\xi_1 h_1+(h_1h_2+h_1^2)
\end{aligned}
$$

当$\|h\|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}\to 0$，必有$h_1\to 0$且$h_2\to 0$，于是

$$
\frac{h_1h_2+h_1^2}{\|h\|}=\frac{h_1h_2+h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\longrightarrow 0 \qquad (\|h\|\to 0)
$$

所以，$f$关于$x$的Fréchet微分为

$$
\begin{aligned}
df(x)h &= \xi_2h_1+\xi_1h_2+2\xi_1h_1=(\xi_2+2\xi_1)h_1+\xi_1h_2 \\
&= (\xi_2+2\xi_1, \ \xi_1)\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_1}, \ \frac{\partial f}{\partial\xi_2}\right)h=(\nabla f)h
\end{aligned}
$$

显然，$df(x)\in L(R^2, R)=B(R^2, R)$，因此，$df(x)$属于$R^2$的对偶空间$(R^2)'=R^2$中，于是

$$
df(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_1}, \ \frac{\partial f}{\partial\xi_2}\right)=\nabla f=\mathrm{grad}f(x)
$$

这说明，在有限维空间中，Frèchet导算子其实是梯度算子。

**2.8 例** 算子$f: R^n\to R^m$，表成坐标形式为，

$$
\begin{cases}
\eta_1=f_1(\xi_1, \ \cdots, \xi_n) \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\eta_m=f_m(\xi_1, \ \cdots, \xi_n)
\end{cases}
$$

其中，$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in R^n, y=(\eta_1,\cdots\eta_m)\in R^m$。由范数定义知，$f$在$x_0$处可微等价于每一个分量$f_i$：$R^n\to R^1(i=1,2,\cdots,m)$可微，此时必有

$$df(x_0)=\begin{pmatrix} df_1(x_0) \\ \vdots \\ df_m(x_0) \end{pmatrix}$$

又由多元函数微分学，对于每一个$i$，多元函数$f_i$的全微分$df_i(x_0)$必可经偏导数表成

$$[df_i(x_0)]h=\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial \xi_1}h_1+\cdots+\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial \xi_n}h_n$$

$$(i=1,\ \cdots,\ m)$$

这里，$h=(h_1,\ \cdots,\ h_n)$，因此，$df(x_0)$就表示成为Jacobi矩阵：

$$df(x_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial \xi_1}, & \cdots, & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial \xi_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\quad\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial \xi_1}, & \cdots, & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}$$

**2.9 例** 定义泛函$J$：$C[0,\ 1]\to R$为

$$J(x)=\int_0^1 g(t)[ax(t)+bx^2(t)]dt$$

其中$a$，$b$是常数，$g$为已知连续函数。如果$b=0$，则$J$是有界线性泛函，由性质2.3（Ⅲ），有$J'=J$。现设$b\neq 0$，则对于任意$h(t)\in C[0,\ 1]$，有

$$J(x+h)-J(x)$$

$$=\int_0^1 g(t)\{a[x(t)+h(t)]+b[x(t)+h(t)]^2\}dt$$

$$-\int_0^1 g(t)[ax(t)+bx^2(t)]dt$$

$$=\int_0^1 g(t)\{ah(t)+b[2h(t)x(t)+h^2(t)]\}dt$$

$$=\int_0^1 g(t)[a+2bx(t)]h(t)\,dt+\int_0^1 g(t)bh^2(t)dt$$

显然，

$$0\leqslant\frac{\left|\int_0^1 g(t)bh^2(t)dt\right|}{\|h(t)\|}=\frac{|b|\left|\int_0^1 g(t)h^2(t)dt\right|}{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|h(t)|}$$

$$\leqslant\frac{|b|\left(\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|h(t)|\right)^2\int_0^1|g(t)|dt}{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|h(t)|}$$

$$=|b|\,M\|h\|\longrightarrow 0\qquad(\|h\|\to 0)$$

其中$M=\int_0^1|g(t)|dt$

于是，泛函J的Fréchet微分为

$$J'(x)h=dJ(x)h=\int_0^1 g(t)[a+2bx(t)]h(t)dt$$

**2.10** 考虑Hammerstein算子$f$：$C[a,b]\to C[a,b]$，定

义成，对于$x(t)\in C[a, b]$，

$$f(x(t))=\int_a^b K(t, \tau)g(\tau, x(\tau))d\tau$$

其中$K(t, \tau)$为$[a, b]\times[a, b]$上已知连续函数，$g$为已知高阶可微函数，则对于任意$h(t)\in C[a, b]$，有

$$f(x+h)(t)=\int_a^b k\ (t,\tau)[g(\tau,x)+hg_x+\frac{1}{2}h^2g_{xx}+\cdots]dy$$

$$=f(x(t))+Ah+0(\|h\|)$$

其中Fréchet微分$f'(x)h=Ah$是

$$Ah=f'(x)h=\int_a^b K(t, \tau)g_x(\tau, x(\tau))h(\tau)d\tau$$

**2.11** 我们来构造一个非Fréchet可微算子。这时，只需要不存在有界线性算子$A$满足（1）式和（2）式即可。例如。设$f$：$R\to R$，$x\longmapsto|x|$，则在$x_0=0$处，$f$非Fréchet可微。假如结论不真，$f$如果在$x_0=0$处可微，必有

$$0=\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|f(0+h)-f(0)-Ah\|}{\|h\|}=\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\,|h|-Ah\|}{\|h\|}$$

只有$Ah=|h|$，然而，如此定义的A：$h\to|h|$不是线性算子。

下面举例说明，一个映射$f$有有界线性的Gâteaux微分，但是却得不到是Fréchet可微的。

**2.12 例** 考虑泛函$f$：$R^2\to R^1$如下：

$$f(x)=\begin{cases}\xi_1+\xi_2+\dfrac{\xi_1^8\xi_2}{\xi_1^4+\xi_2^2}, & \text{如果 } x=(\xi_1, \xi_2)\neq(0, 0);\\ 0, & \text{如果 } x=(\xi_1, \xi_2)=(0, 0)。\end{cases}$$

因为$\left|\dfrac{\xi_1^3\xi_2}{\xi_1^4+\xi_2^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}|\xi_1|$，故$f$在点（0，0）处连续。记$\theta=(0, 0)$，$h=(h_1, h_2)$，则有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\theta+th)-f(\theta)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{th_1+th_2+\dfrac{t^4h_1^3h_2}{t^4h_1^4+t^2h_2^2}}{t}$$

$$=h_1+h_2$$

所以，$f$在$\theta$点处Gâteaux可微，并且具有有界线性的Gâteaux微分：

$$[Df(\theta)]h=f'(\theta)h=h_1+h_2$$

下证$f$在$\theta$处非Fréchet可微，如果$f$在$\theta$处Fréchet可微，则由定理2.5，

$$[df(\theta)]h=[Df(\theta)]h=h_1+h_2$$

于是，

$$\omega(\theta, h)=f(\theta+h)-f(\theta)-df(\theta)h=\frac{h_1^3h_2}{h_1^4+h_2^2}$$

所以，

$$\frac{\omega(\theta, h)}{\|h\|}=\frac{h_1^3h_2}{(h_1^4+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

取$h_2=h_1^2$，并令$h_1\to 0+$，得到

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(\theta, h)\|}{\|h\|}=\lim_{h_1\to 0+}\frac{h_1^5}{2h_1^4\sqrt{h_1^2+h_1^4}}=\frac{1}{2}$$

与$\omega(\theta, h)=0(\|h\|)$矛盾。

## §3 高阶微分

与初等微积分一样，有了一阶微分之后，我们可以定义赋范空间中算子的二阶以及二阶以上的微分，它们统称为高阶微分。

首先讨论定义在乘积空间中的算子的$n$线性有界概念。

**3.1 定义** 设$X$和$Y$是赋范空间，算子$f_n:\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n个}\to Y$称为**n线性有界算子**，如果（Ⅰ）$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$对于每一个变元$x_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）都是线性的；（Ⅱ）存在常数$M$，使得

$$\|f_n(x_1, x_2\cdots, x_n)\|\leqslant M\|x_1\|\cdots\|x_n\| \tag{1}$$

对于所有的$x_i\in X$（$i=1, 2, \cdots, n$）成立。

易证，按照通常的加法和标量乘法，并且定义范数

$$\|f_n\|=\sup_{\|x_i\|=1(i=1,2,\cdots n)}\|f_n(x_1, \cdots, x_n)\| \tag{2}$$

则全体$n$线性有界算子$f_n$构成一个赋范空间，记为$B(\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n个}, Y)$，显然，如果$X$和$Y$是Banach空间，则空间$B(\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n个}, Y)$也是Banach空间。

**3.2 定义** 设$X$和$Y$是是实赋范空间，则可用归纳法定义映射$f$：$X\to Y$的**n阶微分和n阶导映射**如下：对于$h_1, h_2, \cdots h_n\in X$，

$$d^nf(x; h_1,\cdots,h_n)=d(d^{n-1}f)[(x; h_1,\cdots,h_{n-1}); h_n] \tag{3}$$

$$f^{(n)}(x)=df^{(n-1)}(x);\quad n=1\text{时},\ f'(x)=df(x) \tag{4}$$

注意：与一阶微分不同，高阶微分与高阶导映射有很大区别，$n$阶微分$d^nf(x;\ h_1,\ \cdots,\ h_n)$是变元$h_1,\ \cdots,\ h_n$的$n$线性算子，但它未必是$n$线性有界算子。如果$d^nf(x;\ h_1,\ \cdots,\ h_n)$是$h_1,\ \cdots,\ h_n$的$n$线性有界算子，则称它为$n$阶有界线性微分，表成

$$d^nf(x;\ h_1,\ \cdots,\ h_n)=[d^nf(x)](h_1,\ \cdots,\ h_n) \tag{5}$$

这里$d^nf(x)\in B(\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n\text{个}},\ Y)$。这个表示式应这样来理解：$df(x)\in B(X,\ Y)$，则$d^2f(x)\in B(X,\ B(X,\ Y))$，但是可以证明$B(X,\ B(X,\ Y))$与$B(X\times X,\ Y)$是等距同构的，所以，可以写$d^2f(x)\in B(X\times X,\ Y)$。再由归纳法知$d^nf(x)\in B(\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n\text{个}},\ Y)$。

一般说来，即使$d^nf(x)$存在亦得不到$n$阶导映射$f^{(n)}(x)$存在。但是，如果$X$完备，$d^nf(x)$在开凸集$\Omega\in X$中连续，则在$\Omega$中，$f^{(n)}x$存在，并且$f^{(n)}(x)=d^nf(x)$。

**3.3 定义** 设$X$和$Y$是同域上的线性空间，映射$f: X\times X\to Y$称为是**双线性映射**，如果对于任意的$h,\ k\in X$，$Y$中有元$f(h,\ k)$与之对应，并且对于任意$x,\ y,\ z\in X$和任何标量$\alpha,\ \beta$，都有

$$f(\alpha x+\beta y,\ z)=\alpha f(x,\ y)+\beta f(y,\ z) \tag{6}$$

和

$$f(x,\ \alpha y+\beta z)=\alpha f(x,\ y)+\beta f(x,\ z) \tag{7}$$

例如：一个实$n\times n$矩阵$A=(a_{i,j})_{n\times n}$就决定了$R^n\times R^n\to R$的一个双线性映射（泛函），对于任意的$x,\ y\in R^n$，$x=(\xi_i)$，$y=(\eta_i)$，则

$$f(x, y) = xAy^T = (\xi_1, \cdots, \xi_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i a_{ij} \eta_j$$

两个变量的实连续函数给出了一个双线性映射如下：$f$: $C[0, 1] \times C[0, 1] \to R$，对于任意的$x(t)$，$y(t) \in C[0, 1]$，

$$f(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 K(s, t) x(s) y(t) ds dt$$

其中$K(s, t)$是区域$[0, 1] \times [0, 1]$上的已知连续函数。

定义3.3中的双线性映射$f$，如果还满足条件$f(x, y) = f(y, x)$对于一切$x$，$y \in X$成立，则称$f$为$X \times X \to Y$上的对称双线性映射。这时$f(h, k)$完全由$f(h, h)$决定。因为对于任意$k$，$h \in X$，有

$$f(h+k, h+k) = f(h, h) + f(h, k) + f(k, h) + f(k, k)$$
$$= f(h, h) + 2f(h, k) + f(k, k)$$

于是

$$f(h, k) = \frac{1}{2}[f(h+k, h+k) - f(h, h) - f(k, k)] \tag{8}$$

如果$X$，$Y$是实赋范空间，$\Omega \in X$，映射$f$: $\Omega \to Y$在点$x \in \Omega$二阶Fréchet可微，则$d^2 f(x)$是一个对称双线性映射，亦

即，有$d^2f(x)(h_1, h_2)=d^2f(x)(h_2, h_1)$。

**3.4 定理（Taylor）公式** 设$X, Y$是实赋范空间，$\Omega\in X$是开凸集，映射$f: \Omega\to Y$在点$x\in\Omega$处$n$次Fréchet有界线性可微，则对于$h\in\Omega$，有

$$f(x+h)=f(x)+df(x)h+\frac{1}{2!}d^2f(x)h^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}d^nf(x)h^n+\omega(x,h) \qquad (9)$$

其中

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(x, h)\|}{\|h\|}=0$$

注意：这里已经使用了$n$次微分关于$h_1, \cdots, h_n$的对称线性性。

下面列举几个计算高阶微分（主要是二阶微分）的例子。

**3.5 例** 上节例2.7中，$f: R^2\to R$，对于$x=(\xi_1, \xi_2)$，$f(x)=\xi_1\xi_2+\xi_1^2$，则$df(x)h=(\xi_2+2\xi_1)h_1+\xi_1h_2=\nabla f\cdot\mathbf{h}$，这里$h=(h_1, h_2)$。为了得到$f$的二阶微分，令$\tilde{h}=(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$，而将$h=(h_1, h_2)$固定。于是

$$d^2f(x; h, \tilde{h})$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{df(x+t\tilde{h},h)-df(x,h)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\{[(\xi_2+t\tilde{h}_2)+2(\xi_1+t\tilde{h}_1)]h_1+(\xi_1+t\tilde{h}_1)h_2\}-[(\xi_2+2\xi_1)h_1+\xi_1h_2]}{t}$$

$$= (\tilde{h}_2 + 2\tilde{h}_1) h_1 + \tilde{h}_1 h_2 = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{h} Q h$$

其中

$$\tilde{h} = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2), \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

所以,

$$d^2 f(x; h, \tilde{h}) = \tilde{h} d^2 f(x) h = \tilde{h} Q h$$

因此,

$$d^2 f(x) = Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} \end{pmatrix}$$

将上述结果推广，研究上节例2.8中的算子$f$： $R^n \to R^m$，则其二阶Fréchet微分可以表成

$$d^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}\right) \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right) \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial f_m}{\partial \xi_n}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial}{\partial \xi_n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}\right) \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right) \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_n}\left(\frac{\partial f_m}{\partial \xi_n}\right) \end{pmatrix}$$

这里，矩阵中的偏导数均在$x_0$处算出。

**3.6 例** 考虑上节例2.9中定义的泛函$J$，当$b \neq 0$时，我们有二阶Fréchet微分为

$$dJ(x)h = J'(x)h = \int^1 g(t)[a + 2bx(t)]h(t)dt$$

现固定$h(t)\in C[0,1]$，对于任意$\tilde{h}(t)\in C[0,1]$，有

$$d^2J(x)h\tilde{h}$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{dJ(x+\tau\tilde{h})h-dJ(x)h}{\tau}$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{\int_0^1 g(t)[a+2b(x(t)+\tau\tilde{h}(t))]h(t)dt-\int_0^1 g(t)\cdot[a+2bx(t)]h(t)dt}{\tau}$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{2b\tau\int_0^1 g(t)\tilde{h}(t)h(t)dt}{\tau}$$

$$=2b\int_0^1 g(t)h(t)\tilde{h}(t)dt$$

**3.7 例** 我们定义泛函$J$：$L^2[a,b]\to R$为$J(u)=\int_a^b\int_a^b u(s)K(s,t)u(t)dtds$，其中$K(s,t)$是区域$[a,b]\times[a,b]$上已知连续函数。又定义线性算子$A$：$L^2[a,b]\to L^2[a,b]$为

$(Au)(t)=\int_b^a K(s,t)u(s)ds$。因为$L^2[a,b]$是内积空间，其上的内积通常为

$$\langle f,g\rangle=\int_b^a f(t)g(t)dt,\ \text{则}J(u)=\langle u,Au\rangle$$

于是，对于任意的$h\in L^2[a,b]$，有

$$J(u+h)=\langle u+h,A(u+h)\rangle$$
$$=J(u)+\langle h,Au\rangle+\langle u,Ah\rangle+\langle h,Ah\rangle\quad(10)$$

根据Taylor公式（9），知$J''$是（10）式中关于$h$的二次项的系数，所以

$$J''(u)(h,\ h)=\langle h,\ Ah\rangle=\int_a^b\int_a^b h(s)K(s,t)h(t)dtds$$

利用（8）式，蕴含

$$J''(u)(h,\ k)=\frac{1}{2}\{\langle h,\ Ak\rangle+\langle k,\ Ah\rangle\}$$

$$=\langle h,\ \frac{1}{2}(A+A^*)k\rangle$$

这里，$A^*$是$A$的伴算子，$(A^*u)(t)=\int_a^b K(s,\ t)u(s)ds$。如果$A$是自伴算子，则$K(t,\ s)=K(s,\ t)$，$A=A^*$，则$J''(u)(h,\ k)=\langle h,\ Ak\rangle$，这时，$J''(u)$关于$h$，$k$是双线性对称泛函。

# 本书所引外国人名译名表

Abel, N.H. 阿贝尔（挪）
Archimedes 阿基米德（希）
Banach, S. 巴拿赫（波兰）
Bessel, F.W. 贝塞尔（德）
Birkhoff, G.D. 伯克霍夫
Bolzano, B. 波尔查诺（奥）
Bourbaki, N. 布尔巴基（法）
Brouwer, L.E.J. 布劳威尔
Cartan, E.J. 嘉当（法）
Cauchy, A.L. 柯西（法）
Cheney, E.W. 切纳里
Cramer, G. 克莱姆（瑞士）
De la Vallée 德·拉·瓦利（法）
De Morgan, A. 德·摩根（英）
Descartes, R. 笛卡尔（法）
Dixmiex, I 迪克斯米埃克斯
Enflo, P. 恩弗罗（瑞典）
Euclid 欧几里得（希）
Euler, L. 欧拉（瑞士）
Fejer, L. 费叶尔（匈）
Fisher, R.A. 费希尔
Fourier, J.B.J. 付里叶（法）
Fréchet, M. 弗雷希特（法）
Fredholm, E.J. 弗雷德霍姆（瑞典）
Gâteaux 加托
Gram 格拉姆

| | |
|---|---|
| Haar | 哈尔 |
| Hahn, H. | 哈恩 |
| Hamel | 哈梅尔 |
| Hamilton, W.R. | 哈密顿（爱尔兰） |
| Hammerstein | 哈默斯坦 |
| Helly, E. | 赫利 |
| Hilbert, D. | 希尔伯特（德） |
| Jacobi, C.G.J | 雅可比（德） |
| Jordan, C. | 约当（法） |
| Kellogg | 凯洛格 |
| Kelly | 凯利 |
| Kowalewski, G. | 利瓦列斯基 |
| Kronecker, L. | 克罗内克尔（德） |
| Lagrange, J.L. | 拉格朗日（法） |
| Laguerre, E.N. | 拉盖尔（法） |
| Lebesgue, H.L. | 勒贝格（法） |
| Legendre, A.M. | 勒让德（法） |
| Lipschitz, R.O.S. | 李普希兹（德） |
| Liouville, J. | 刘维尔（法） |
| Minkowski, H. | 闵可夫斯基（俄，德） |
| Newton, I. | 牛顿（英） |
| Parseval, M.A. | 帕塞法尔（德） |
| Poincaré, H. | 庞加莱（法） |
| Pythagoras | 毕达哥拉斯（希） |
| Riemann, G.F.B. | 黎曼（德） |
| Riesz, F. | 黎斯（匈） |
| Rodrigues, O. | 罗得里克（法） |
| Schauder | 肖尔 |
| Schmidt, E. | 施密特（德） |

Schur, I. 苏尔

Schwarz, H.A. 许瓦尔兹（德）

Stieltjes, T.J. 斯蒂尔吉斯（荷）

Sturm, J.C.F. 斯图姆（瑞士）

Taylor, B. 泰勒（英）

Vandermonde, A.T. 范德蒙

Volterra, V. 沃尔泰拉（意）

Weierstrass, K. 维尔斯特拉斯（德）

Young, W.H. 杨格

Zorn 仓恩

Буняковский, В.Я. 布尼亚可夫斯基（俄）

Гельфанд, И.М. 盖尔芳特（苏）

Соболев, С.Л. 索伯列夫（苏）

Чебышев, П.Л. 契贝谢夫（俄）

[General Information]
书名=应用泛函分析引论
作者=陈殿杰
页数=294
SS号=10097948
DX号=
出版日期=1987年12月第1版
出版社=重庆大学出版社